

تعیین پارامتر پایداری در زمین مرجع کردن تصاویر قدرت تفکیک بالا بوسیله توابع گویا

امیر ظفری^{۱*}، علیرضا امیری سیمکویی^۲، مهدی مومنی^۳

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان

۲- دانشیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان

۳- استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۷/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۵/۲۰

چکیده

تصاویر ماهواره‌ای قدرت تفکیک بالا در علوم مختلف دارای کاربردهای گسترده‌ای هستند. فرایند زمین‌مرجع کردن به عنوان جزء جدا نشدنی استخراج عوارض مکانی دقیق از این تصاویر، در مطالعات بسیاری بررسی شده است. در زمین‌مرجع کردن تصاویر ماهواره‌ای، از مدل‌های مختلفی استفاده می‌شود که در این میان، توابع گویا از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. تعیین ضرایب توابع گویا یک مسئله بدووضع است که برای حل این مشکل از روش پایداری‌سازی تیخونوف استفاده می‌شود. در این روش پایداری‌سازی انتخاب پارامتر پایداری‌سازی اهمیت زیادی دارد. در این پژوهش این پارامتر پایداری‌سازی به دو روش مینیمم شدن مجذور میانگین مربعات خطاها و نیز منحنی L در حل مسئله تعیین ضرایب توابع گویا محاسبه شد. سپس این دو روش با سرشکنی کمترین مربعات استاندارد مدل پارامتری و همچنین مدل ترکیبی برای تعیین ضرایب توابع گویا در زمین‌مرجع کردن تصاویر استفاده شد. این محاسبات بر روی دو گروه نقاط کنترل با تعداد متفاوت انجام شد. با استفاده از این دو مدل (پارامتری و ترکیبی) پارامتر پایداری‌سازی به روش‌های منحنی L و مینیمم سازی مجذور میانگین مربعات خطاها، با ۵۵ نقطه محاسبه گردید. نتایج نشان می‌دهد که روش مجذور میانگین مربعات خطاها دقت ۴/۴۵ پیکسل و روش منحنی L دقت ۵/۴۰ پیکسل را در مدل پارامتری به دست می‌دهد. همچنین در مدل ترکیبی، روش مجذور میانگین مربعات خطاها رسیدن به دقت ۳/۴۲ پیکسل و منحنی L رسیدن به دقت ۵/۱۰ پیکسل را نشان می‌دهد. محاسبات فوق با تعداد ۱۲۰ نقطه مجدداً تکرار شد که این بار نتایج رسیدن به دقت‌های تقریباً برابر برای هر دو روش مجذور میانگین مربعات خطاها و منحنی L را نشان می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: تصاویر قدرت تفکیک بالا، توابع گویا، مسئله بدووضع، پایداری‌سازی، منحنی L

* نویسنده مکاتبه کننده: امیر ظفری، اصفهان، دانشگاه اصفهان، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی نقشه‌برداری

تلفن: ۰۹۱۲۷۹۷۵۰۷۱

۱- مقدمه

امروزه استفاده از تصاویر ماهواره‌ای قدرت تفکیک بالا موسوم به $HRSI^1$ در حال افزایش است و درک پتانسیل و کاستی‌های واقعی مدل‌های توجیه فتوگرامتری برای این تصاویر مورد توجه بسیاری از محققان می‌باشد. از آنجا که این تصاویر استفاده زیادی در سیستم‌های اطلاعات مکانی و نقشه‌برداری دارد، نیاز به استخراج اطلاعات مکانی با دقت سه بعدی ($3D$) بالاتر از این تصاویر افزایش می‌یابد [۲ و ۱]. استفاده از توابع گویا^۲ به عنوان مدل معمول در انتقال بین فضای تصویر و فضای شی، مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است [۳].

ضرایب توابع گویا را می‌توان با روش زمین-مستقل، با استفاده از مدل فیزیکی سنجنده یا روش زمین-وابسته و بدون استفاده از مدل فیزیکی سنجنده به دست آورد. در روش زمین-مستقل، ارتباط بین فضای تصویر و شی با استفاده از پارامترهای فیزیکی سنجنده و با استفاده از معادلات شرط هم‌خطی برقرار می‌شود [۴]. در مدل‌های زمین-وابسته این ارتباط با توابع ریاضی و تعداد نقاط کنترل زیاد، ایجاد می‌شود. یکی از این توابع، توابع گویا است [۵]. OGS^3 این توابع را به دلیل قابلیت استفاده آن برای همه حسگرها و مستقل بودن از هندسه تصویر برداری به عنوان استاندارد در پردازش تصاویر قرار داد [۶].

تصحیح هندسی به وسیله توابع گویا به طور معمول به روش کمترین مربعات تکراری با مدل پارامتری و با ورودی مختصات زمینی نقاط کنترل و نقاط عکسی متناظر آن انجام می‌شود. در این روش، حل ضرایب به شدت به جابجایی‌های واقعی زمینی، تعداد و پراکندگی نقاط کنترل در منطقه وابسته است. پس از استفاده از توابع گویا توسط OGS ، پژوهش‌های زیادی

بر روی این مدل ریاضی و کاربردهای آن در تصاویر مختلف انجام شده است. در این میان می‌توان به تاو و هوو (۲۰۰۱)، دیال و گروودکی (۲۰۰۲)، فریزر و هانلی (۲۰۰۳) و فریزر و همکاران (۲۰۰۵) اشاره کرد [۷، ۸ و ۹]. در سال ۲۰۱۰ شریفی و همکاران مدل توابع گویا با سرشکنی مدل ترکیبی ارائه داده و رسیدن به دقت‌های بالا را نسبت به روش مدل پارامتری کمترین مربعات گزارش کرده است [۵]. همچنین میگورو فریزر (۲۰۱۰) به بررسی دقت زمین مرجع کردن تصاویر استریو ژئو آی-۱^۴ در توکیو پرداختند [۱۰]. در ادامه در سال ۲۰۱۲ شن و همکاران روش کمترین مربعات کولوکیشن را در تعیین ضرایب این توابع به کار گرفتند [۱۱].

تعیین ضرایب توابع گویا یک مسئله بدوضع^۵ بوده که حل آن مستلزم استفاده از روش پایدارسازی است. در روش‌های پایدارسازی، با افزودن اطلاعات اضافی به مسئله سعی در حل آن دارند. استفاده از روش پایدارسازی تیخونوف^۶ در مسئله تعیین ضرایب توابع گویا توسط محققان بسیاری مورد استفاده قرار گرفته است. در این روش انتخاب پارامتر پایدارسازی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که این کار معمولاً از طریق منحنی L انجام می‌گیرد [۳، ۴ و ۵]. در این پژوهش‌ها پارامتر پایدارسازی از طریق منحنی L و با استفاده از تعداد نقاط کنترل زیاد محاسبه شده است. در بسیاری از موارد، از جمله در پروژه‌های عملیاتی، به دلیل هزینه زیاد و نیز نوع توپوگرافی منطقه، استخراج و ایجاد نقاط کنترل زیاد با پراکندگی مناسب دارای مشکلات فراوانی می‌باشد. استفاده از نقاط کنترل و چک در حل توابع گویا می‌تواند روشی برای به دست آوردن پارامتر پایدارسازی مناسب باشد. در علوم نقشه‌برداری از مجدور میانگین

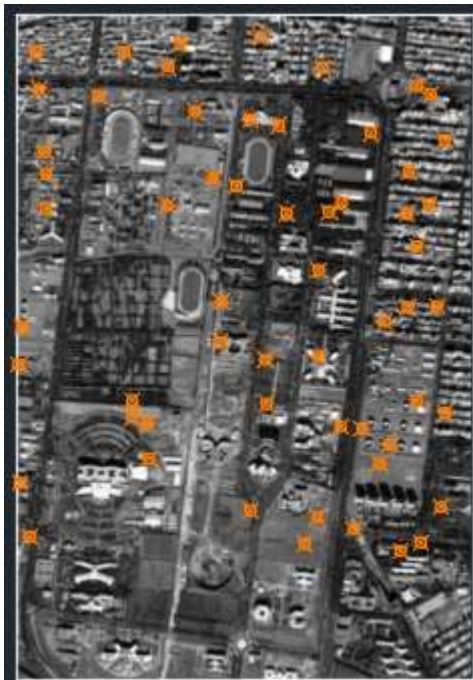
^۴ GeoEye-1^۴ Ill-condition^۵ Tikhonove Regularization^۱ High Resolution Satellite Imagery^۲ Rational Function^۳ Open GIS Consortium

و روشهای تعیین ضرایب پرداخته می‌شود.

۲-۱- تصاویر و منطقه مورد بررسی

داده تصویری مورد ارزیابی، تصاویر سنجنده ژئوآی-۱ در باند پانکروماتیک برای بخشی از شهر اصفهان در طول جغرافیایی ($E 51^{\circ} 38' 56'' - 51^{\circ} 40' 03''$) و عرض جغرافیایی ($N 32^{\circ} 37' 30'' - 32^{\circ} 36' 06''$) می‌باشد که در تاریخ ۲۰/۱۰/۱۰/۲۰ اخذ گردیده است. این منطقه از نظر بافت زمینی دارای تغییرات ارتفاعی نسبتاً زیادی شامل بلوک‌های ساختمانی بلند، عوارض مسطحاتی و فضاهای سبز می‌باشد.

شکل (۱) تصویر منطقه مورد نظر به همراه پراکندگی نقاط گروه ۵۵ نقطه‌ای و شکل‌های (۲، ۳ و ۴) پراکندگی نقاط کنترل (دایره قرمز رنگ) و چک (مثلث آبی رنگ) را در سه گروه نقاط نشان می‌دهد.



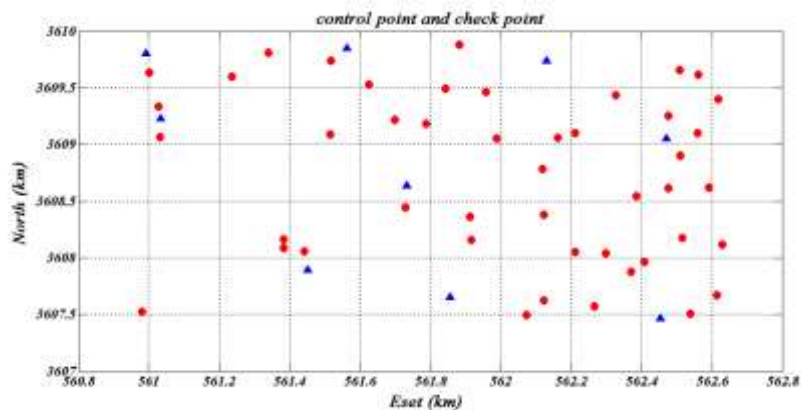
شکل ۱: پراکندگی نقاط کنترل گروه ۱ بر روی تصویر سنجنده ژئوآی-۱

مربعات خطاها در نقاط چک می‌توان به‌عنوان یکی از روش‌های بررسی نحوه و درستی حل مسئله استفاده کرد. مدل توابع گویا از مدل‌های برازشی است، پس باید به طریقی میزان عملکرد آن را کنترل نمود. در حل مسئله توابع گویا، به علت وجود نقاط کنترل و چک، می‌توان مقدار مجذور میانگین مربعات خطاها ($RMSE^1$) روی نقاط چک را محاسبه کرد. از آنجایی که مقدار $RMSE$ روی نقاط چک یکی از روش‌های کنترل دقت است، با استفاده از این معیار می‌توان پارامتر پایداری را به صورتی در نظر گرفت که با استفاده از نقاط کنترل موجود، توابع گویا به شکل مناسبی عمل نمایند و پارامتر پایداری به‌صورتی انتخاب شود که بهترین نتیجه در استفاده از توابع گویا حاصل شود. لازم به ذکر است که همچنان که در استفاده از توابع گویا پراکندگی نقاط کنترل در سطح منطقه در نتایج تأثیر زیادی دارد، نقاط چک نیز باید دارای پراکندگی مناسبی باشد. در این پژوهش برای بررسی این موضوع از دو مجموعه نقطه کنترل با دقت‌های اسمی ۱۰ سانتی‌متر و ۲۰ سانتی‌متر به ترتیب به تعداد ۵۵ و ۱۲۰ نقطه استفاده شد. در گروه ۱۲۰ نقطه‌ای برای ارزیابی دقیق‌تر دو سری نقطه کنترل انتخاب شد. سری اول شامل ۶۸ نقطه کنترل و سری دوم ۱۰۸ نقطه بودند. دقت حل ضرایب توابع گویا در این نقاط با ۱۲ نقطه چک یکسان به‌دست آمد. سپس پارامتر پایداری به دو روش منحنی L و مینیمم شدن خطا در نقاط چک برای دو روش حل کمترین مربعات استاندارد مدل پارامتری و حل کمترین مربعات مدل ترکیبی در سه گروه نقاط به‌دست آمد.

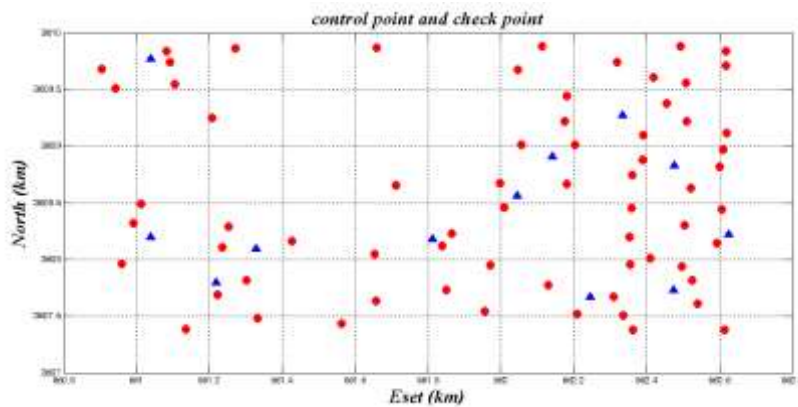
۲-۲ داده‌های تصویری و روش‌های تعیین ضرایب توابع گویا

در این بخش به معرفی تصاویر و محدوده مورد بررسی

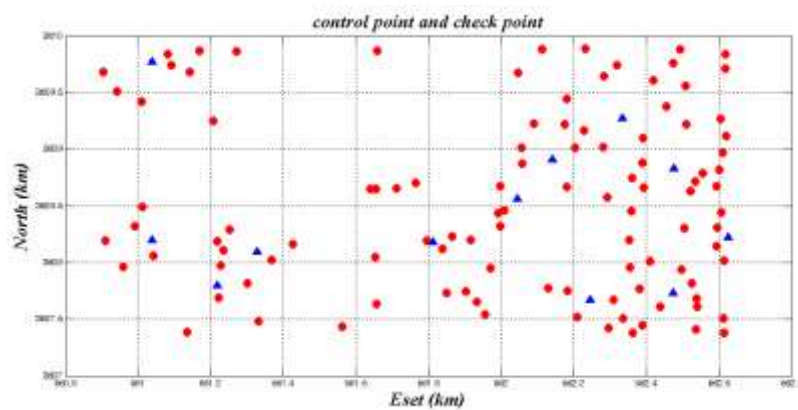
¹ Root Mean Square Error



شکل ۲: پراکندگی نقاط کنترل و چک در مجموعه نقاط گروه ۵۵ تایی



شکل ۳: پراکندگی نقاط کنترل و چک در مجموعه نقاط گروه ۶۸ تایی



شکل ۴: پراکندگی نقاط کنترل و چک در مجموعه نقاط گروه ۱۰۸ تایی

رابطه (۱)

$$x = \frac{P_1(X,Y,Z)}{P_2(X,Y,Z)}$$

$$y = \frac{P_3(X,Y,Z)}{P_4(X,Y,Z)}$$

در این رابطه (x,y) مختصات تصویری و (X,Y,Z) مختصات زمینی نقاط بوده و P_i چند جمله‌ای‌های توابع گویا هستند. به طور کلی شکل توابع گویا به صورت رابطه (۲) است:

$$P(X, Y, Z) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 a_{ijk} X^i Y^j Z^k = a_0 + a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4 XY + a_5 XZ + \dots + a_{19} Z^3$$

که در آن $0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 3, 0 \leq k \leq 3$ و $i + j + k \leq 3$ است.

رابطه (۲)

رابطه (۳)

$$x = \frac{(1 \ X \ Y \ Z \ XY \ XZ \ \dots \ Z^3) \cdot (a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{19})^T}{(1 \ X \ Y \ Z \ XY \ XZ \ \dots \ Z^3) \cdot (1 \ b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{19})^T}$$

$$y = \frac{(1 \ X \ Y \ Z \ XY \ XZ \ \dots \ Z^3) \cdot (c_0 \ c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{19})^T}{(1 \ X \ Y \ Z \ XY \ XZ \ \dots \ Z^3) \cdot (1 \ d_0 \ d_1 \ d_2 \ \dots \ d_{19})^T}$$

دیگر آن، به شکل خطی $Ax = b$ در می‌آید. با اضافه کردن باقیمانده مولفه‌های مختصات عکسی (V_x, V_y) و بازآرایی مجدد این معادله، می‌توان نوشت:

$$V_x = \left[\frac{1}{B} \ \frac{X}{B} \ \frac{Y}{B} \ \frac{Z}{B} \ \frac{XY}{B} \ \frac{XZ}{B} \ \dots \ \frac{Z^3}{B} \ \frac{-xX}{B} \ \frac{-xY}{B} \ \dots \ \frac{-xZ^3}{B} \right] \cdot J - \frac{x}{B}$$

$$V_y = \left[\frac{1}{D} \ \frac{X}{D} \ \frac{Y}{D} \ \frac{Z}{D} \ \frac{XY}{D} \ \frac{XZ}{D} \ \dots \ \frac{Z^3}{D} \ \frac{-yX}{D} \ \frac{-yY}{D} \ \dots \ \frac{-yZ^3}{D} \right] \cdot K - \frac{y}{D}$$

و رابطه (۱۱)

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & 0 \\ 0 & P_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_x & 0 \\ 0 & P_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ C \end{pmatrix}$$

رابطه (۱۱) شکل بازنویسی شده رابطه (۴) است و

همچنین:

$$V = PAX - Pb \quad \text{رابطه (۱۲)}$$

که در آن ماتریس M و N به ترتیب ماتریس طرح مختصات (x,y) تصویری می‌باشند. P_x و P_y ماتریس‌های وزن متناظر (x,y) آن‌ها هستند که برای n نقطه کنترل با استفاده از مقادیر B و D رابطه (۵) محاسبه می‌شوند:

$$P_x = \text{diag} \left(\frac{1}{B_1} \ \frac{1}{B_2} \ \frac{1}{B_3} \ \dots \ \frac{1}{B_n} \right) \quad \text{رابطه (۱۳)}$$

$$P_y = \text{diag} \left(\frac{1}{D_1} \ \frac{1}{D_2} \ \frac{1}{D_3} \ \dots \ \frac{1}{D_n} \right)$$

۲-۲- مدل پارامتری توابع گویا با حل کمترین مربعات استاندارد

توابع گویا ارتباط بین فضاهای تصویر و زمین را از طریق نسبت دو چند جمله‌ای برقرار می‌کنند. معادلات زیر که موسوم به معادلات معکوس هستند جهت انتقال از فضای زمینی به فضای عکسی طراحی شده‌اند [۱۲].

رابطه (۲)

که در آن $0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 3, 0 \leq k \leq 3$ و $i + j + k \leq 3$ است.

رابطه (۳)

رابطه (۳) شکل برداری رابطه‌های (۱) است که در آن، با ضرب مخرج توابع گویا در مولفه‌های عکسی و منتقل کردن جملات شامل ضرایب (مجهولات) به یک طرف تساوی و نگه داشتن مولفه‌ی مختصات عکسی در طرف

رابطه (۴)

که در آن:

رابطه (۵)

$$B = (1 \ X \ Y \ Z \ \dots \ Z^3) \cdot (1 \ b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{19})^T$$

و رابطه (۶)

$$D = (1 \ X \ Y \ Z \ \dots \ Z^3) \cdot (1 \ d_0 \ d_1 \ d_2 \ \dots \ d_{19})^T$$

J, K بردار ضرایب مجهول هستند که:

$$J = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{19} \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{19})^T \quad \text{رابطه (۷)}$$

$$K = (c_0 \ c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{19} \ d_0 \ d_1 \ \dots \ d_{19})^T \quad \text{رابطه (۸)}$$

با تعریف بردار مختصات‌های عکسی برای n نقطه می‌توان نوشت:

$$R = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n]^T \quad \text{رابطه (۹)}$$

$$C = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ \dots \ y_n]^T \quad \text{رابطه (۱۰)}$$

لازم به ذکر است که در این روش، فرایند پایدارسازی تاثیر چندانی در جواب‌های بدست آمده برای ضرایب ندارد و محاسبات نشان داد که معکوس گیری از ماتریس نرمال ($A^T A$) بدون مشکلی قابل انجام است.

۲-۲-۲- حل با ماتریس وزن:

در این روش به دلیل بدوضع بودن مسئله، لازم است یک مقدار ثابت کوچک مانند λ در معادلات وارد شود که پارامتر پایدارسازی نام دارد. این مقدار ثابت در بازه [۰ و ۱] به دست می‌آید [۴]. حل در این روش نیز به صورت تکراری است و در آن مقدار مجهولات و ماتریس وزن تا همگرا شدن جواب، به‌هنگام می‌شوند.

$$(A^T P^2 A + \lambda^2 I) x - A^T P^2 b = 0 \quad (۱۹)$$

$$\rightarrow x = (A^T P^2 A + \lambda^2 I)^{-1} A^T P^2 b \quad (۲۰)$$

رابطه‌های (۱۹ و ۲۰) حل کمترین مربعات وزن دار مدل پارامتری توابع گویا است.

$$x_{(0)} = 0, \quad x_{(0)} = P(x_{(0)}) = I \quad (۲۱)$$

رابطه (۲۱) مقادیر اولیه مجهولات و ماتریس وزن را نشان می‌دهد.

$$\text{رابطه (۲۲)}$$

$$x_{(s)} =$$

$$x_{(s-1)} + (A^T P_{(s-1)}^2 A + \lambda^2 I)^{-1} A^T P_{(s-1)}^2 \delta b_{(s-1)}$$

از رابطه‌ی بازگشتی (۲۲) در هر مرحله مقدار مجهولات به‌هنگام می‌شوند. پس از محاسبه مقدار مجهول (x) در هر تکرار، در مرحله بعد، ماتریس وزن P و بردار خطای بست δb به‌هنگام می‌شوند:

$$P_{(s)} = P(x_{(s)}) \quad (۲۳)$$

$$\delta b_{(s)} = b - Ax_{(s)} \quad (۲۴)$$

۲-۳- مدل ترکیبی با حل کمترین مربعات استاندارد

مختصات زمینی معمولاً از یکسری عملیات میدانی یا نقشه‌های توپوگرافی و یا بوسیله جی پی اس و نقشه برداری زمینی به دست می‌آیند. این امر باعث می‌شود که این نقاط دارای دقت‌های متفاوت باشند. شریفی و همکاران در سال ۲۰۱۰ [۵] با بازآرایی

و رابطه (۱۴)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & \dots & Z_1^3 & -x_1 X_1 & \dots & -x_1 Z_1^3 \\ 1 & X_2 & \dots & Z_2^3 & -x_2 X_2 & \dots & -x_2 Z_2^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_n & \dots & Z_n^3 & -x_n X_n & \dots & -x_n Z_n^3 \end{bmatrix}$$

و رابطه (۱۵)

$$N = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & \dots & Z_1^3 & -y_1 X_1 & \dots & -y_1 Z_1^3 \\ 1 & X_2 & \dots & Z_2^3 & -y_2 X_2 & \dots & -y_2 Z_2^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_n & \dots & Z_n^3 & -y_n X_n & \dots & -y_n Z_n^3 \end{bmatrix}$$

در استفاده از توابع گویا به علت تفاوت بعد زیاد در مختصات عکسی و مختصات زمینی نقاط کنترل، برای جلوگیری از منفرد شدن ماتریس و نیز کاهش خطای محاسبات، دو فرایند نرمال‌سازی مختصات‌ها و پایدارسازی انجام می‌شود. در قسمت‌های بعد در مورد فرایند پایدارسازی جهت حل ضرایب توابع گویا بحث می‌شود. برای نرمال سازی داده‌ها تحقیقات بسیاری انجام شده است و بهترین بازه برای این کار [۱ و -۱] بدست آمده است [۴].

رابطه (۱۶)

$$x_n = \frac{x-x_0}{x_s}, \quad y_n = \frac{y-y_0}{y_s}, \quad X_n = \frac{X-X_0}{X_s}, \quad Y_n = \frac{Y-Y_0}{Y_s}, \quad Z_n = \frac{Z-Z_0}{Z_s}$$

در رابطه‌های (۱۶) مقادیر $\{Z_n, Y_n, X_n, y_n, x_n\}$ مختصات‌های نرمال شده، $\{Z_0, Y_0, X_0, y_0, x_0\}$ مولفه‌های شیب و $\{Z_s, Y_s, X_s, y_s, x_s\}$ مولفه‌های ضریب مقیاس هستند.

حل پارامتری کمترین مربعات استاندارد معادلات رابطه (۱۲) به دو روش امکان پذیر است که در بخش‌های زیر به آن پرداخته شده است.

۲-۲-۱- حل با ماتریس وزن واحد (روش مستقیم):

در این حالت، ماتریس وزن مشاهدات به صورت یک ماتریس یکه در نظر گرفته می‌شود:

$$P = I_{78 \times 78} \quad (۱۷)$$

در نهایت ضرایب مجهول از روش کمترین مربعات استاندارد مستقیم و به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (۱۸)$$

معادلات ترکیبی ضرایب توابع گویا را مجدداً محاسبه کردند [۵]:

$$x + b_1xX + b_2xY + b_3xZ + \dots + b_{19}Z^3 - (a_0 + a_1X + a_2Y + \dots + a_{19}Z^3) = 0$$

$$y + d_1yX + d_2yY + d_3yZ + \dots + d_{19}Z^3 - (c_0 + c_1X + c_2Y + \dots + c_{19}Z^3) = 0$$

به روش کمترین مربعات عمل می‌شود [۱۳].

$$f(x, b) = f(x^{(0)}, y^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x^{(0)} \\ b=b^{(0)}}} (x - x^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{\substack{x=x^{(0)} \\ b=b^{(0)}}} (b - b^{(0)}) = 0 \quad \text{رابطه (۲۶)}$$

$$P = (BQ_y B^T)^{-1} \quad \text{رابطه (۳۰)}$$

$$\hat{\delta} = -(A^T P A)^{-1} A^T P w \quad \text{رابطه (۳۱)}$$

$$\hat{V} = -Q_y B^T P (A \hat{\delta} + w) \quad \text{رابطه (۳۲)}$$

$$\hat{b} = b + \hat{V}$$

در رابطه (۳۲)، \hat{b} و \hat{V} به ترتیب بردار مشاهدات و باقیمانده‌های برآورد شده هستند. روش مدل ترکیبی برای روش مدل غیر خطی به صورت تکراری حل می‌شود:

$$A^{(n)}(x^{(n+1)} - x^{(n)}) + B^{(n)}(b^{(n+1)} - b^{(n)}) + f(x^{(n)}, b^{(n)}) = 0 \quad \text{رابطه (۳۳)}$$

۲-۴- مسائل بدووضع و روش‌های مختلف پایدارسازی

مسئله $Ax = b$ با حل کمترین مربعات به شکل رابطه (۳۶) که شرایط (۱) و (۲) برای آن برقرار باشد را یک مسئله بدووضع می‌گویند [۱۴].

$$Ax = b$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times u}, b \in \mathbb{R}^{n \times 1}, x \in \mathbb{R}^{u \times 1}$$

$$\min \|Ax - b\|_2^2, x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

۱- مقادیر منفرد ماتریس ضرایب A به سمت صفر میل کند

۲- نسبت بزرگ‌ترین مقدار ویژه به کوچک‌ترین مقدار ویژه غیر صفر ماتریس ضرایب A (عدد شرط ماتریس) خیلی بزرگ باشد.

رابطه‌های (۱) به صورت زیر و در نظر گرفتن مختصات زمینی نقاط کنترل به‌عنوان مشاهدات و تشکیل رابطه (۲۵)

در حالت کلی یک مدل ترکیبی به صورت $f(x, b) = 0$ است که برای حل آن

$$A\delta + BV + w = 0 \quad \text{رابطه (۲۷)}$$

رابطه (۲۷) شکل کلی رابطه (۲۶) است که در آن،

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x^{(0)} \\ b=b^{(0)}}} \quad \text{ماتریس مشتق جزئی نسبت به مجهولات،}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial b} \Big|_{\substack{x=x^{(0)} \\ b=b^{(0)}}} \quad \text{ماتریس مشتقات جزئی}$$

نسبت به مشاهدات و w بردار خطای بست است که

$$w = f(x^{(0)}, b^{(0)}) \quad \text{رابطه (۲۸)}$$

$$(A^T P A)\delta + A^T P w = 0 \quad \text{رابطه (۲۹)}$$

رابطه (۲۹) حل کمترین مربعات رابطه (۲۷) است و P ماتریس وزن مشاهدات است که:

و w بردار خطای بست است که:

$$w^{(n)} = f(x^{(n)}, b^{(n)}) + B^{(n)}(b^{(0)} - b^{(n)}) \quad \text{رابطه (۳۴)}$$

در این روابط باید توجه کرد، در تکرار اول $b^{(0)} = b$ بردار مشاهدات اولیه است. در این روش بردار مشاهدات و پارامترها در هر تکرار به‌هنگام می‌شوند و این روند تا زمانی که اختلاف بین پارامترها $\delta^{(n)} = x^{(n+1)} - x^{(n)}$ در دو تکرار متوالی صفر شود، ادامه پیدا می‌کند.

$$\hat{\delta} = -(A^T P A + \lambda^2 I)^{-1} A^T P w \quad \text{رابطه (۳۵)}$$

رابطه (۳۵) حل ضرایب توابع گویا به روش مدل ترکیبی به روش پایدارسازی تیخونوف است.

ضرایب مجهولات (u_i^T/σ_i) شود. در این راستا یک روش پایدارسازی ارائه می‌شود که در آن یک ماتریس $A_{\lambda \geq 0}$ جایگزین ماتریس A می‌شود. با به کارگیری این ماتریس سعی بر آن است که تا حد امکان از تأثیر مقادیر منفرد کوچک کاسته شود [۱۵].

در حل ضرایب توابع گویا، روش پایدارسازی تیخونوف استاندارد که به‌طور خلاصه روش تیخونوف نامیده می‌شود مورد استفاده قرار می‌گیرد. همان‌طور که عنوان شد در مسائل بدوضع به دلیل وجود مقادیر منفرد کوچک در تجزیه مقادیر منفرد ماتریس، مسئله غیر قابل برآورد است. لذا به‌منظور پایدارسازی مسئله، اطلاعات بیشتری در خصوص جواب به مسئله اضافه می‌شود. روش تیخونوف یکی از پرکاربردترین روش‌های پایدارسازی در حل مسائل بدوضع محسوب می‌شود که کاربرد فراوان آن را در اغلب مسائل کاربردی درگیر با مسائل معکوس می‌توان یافت. این روش را نخستین بار فیلیپس (۱۹۶۲) و تیخونوف (۱۹۶۳) مستقل از یکدیگر ارائه دادند [۱۴].

$$\text{رابطه (۴۱)} \quad F_{Tikhonov} = \|Ax - b\|_2^2 + \lambda^2 \|x\|_2^2$$

رابطه (۴۱) تابع تیخونوف در روش استاندارد تیخونوف است [۱۵].

روش‌های متفاوتی در تعیین پارامتر λ وجود دارد که یکی از این روش‌ها منحنی L می‌باشد. این روش یکی از روش‌های انتخاب پارامتر پایدارسازی است که در آن نیاز به شناخت نرم خطای مشاهدات وجود ندارد و به‌صورت گرافیکی تعیین می‌شود. منحنی L شامل یک قسمت قائم، یک قسمت با شیب کم در همسایگی قسمت قائم و یک قسمت افقی است. قسمت افقی متناظر با جواب‌هایی است که پارامتر پایدارسازی بزرگی دارد و جواب تحت الشعاع اغتشاش (بایاس) حاصل از پایدارسازی است. قسمت قائم متناظر با جواب‌هایی است که پارامتر پایدارسازی کوچک دارند و در نتیجه جواب تحت الشعاع اغتشاش ناشی از خطای مشاهدات e قرار می‌گیرد. هنگامی که تغییرات

یکی از ابزارهای مناسب آنالیز ماتریس ضرایب A تجزیه مقدار منفرد یا SVD^1 است. تجزیه SVD ماتریس A به‌صورت رابطه (۳۷) است که در آن U و V به ترتیب بردارهای منفرد چپ و راست ماتریس A هستند.

$$\text{رابطه (۳۷)} \quad A_{mn} = U_{mn} \Sigma_{nn} V_{nn}^T = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T$$

عناصر قطری Σ_{nn} ، مقادیری غیر منفی هستند که:

$$\text{رابطه (۳۸)} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

$$\text{و رابطه (۳۹)} \quad x_{LS} = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i$$

رابطه (۳۹) جواب کمترین مربعات استاندارد بدون وزن روش SVD است.

بزرگ بودن عدد شرط در ماتریس ضرایب A باعث می‌شود که فقط وجود خطاهای گرد کردن مانع از حصول جواب عددی صحیح برای دستگاه معادلات شود. همچنین به‌علت وجود خطا در بردارهای منفرد U و V ، نمی‌توان جوابی پایدار برای x به‌دست آورد. طبق رابطه (۳۹) خطاهای موجود در بردار b با ضریب $1/\sigma_i$ تقویت می‌شوند و در صورتی که مقادیر σ_i خیلی نزدیک صفر باشند، خطای بردار b ، بردار جواب x را تحت تأثیر قرار می‌دهد. هدف از پایدارسازی کاستن یا حذف جواب متناظر با مقادیر منفرد کوچک است.

$$\text{رابطه (۴۰)} \quad x_{LS} = \sum_{i=1}^n f_i \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i$$

رابطه (۴۰) جواب حاصل از پایدارسازی است. f_i ضریب فیلتر نام دارد و برای روش‌های گوناگون پایدارسازی متفاوت است [۱۳].

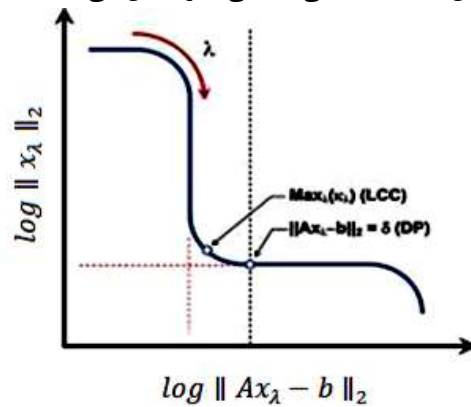
در مسائل بدوضع ماتریس A از لحاظ ریاضی کمبود مرتبه ندارد. به عبارتی با وجود اینکه دارای مرتبه کامل ستونی است، اما کمبود رتبه عددی مشکل این مسئله است، یعنی یک و یا چند مقدار منفرد بسیار کوچک در تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A وجود دارد. این مقادیر منفرد کوچک می‌تواند سبب افزایش تأثیر خطای موجود در ضرایب مشاهدات (u_i^T) در برآورد

¹ Singular Value Decomposition

۳- نتایج عددی

تصویر مورد استفاده دارای دو سری نقطه با دقت‌های متفاوت است. گروه اول ۵۵ نقطه با دقت ۱۰ سانتی‌متر، که ۴۶ نقطه به‌عنوان نقطه کنترل جهت برآورد ضرایب توابع گویا و ۹ نقطه به‌عنوان نقطه چک و گروه دوم ۱۲۰ نقطه با دقت ۲۰ سانتی‌متر شامل ۱۰۸ نقطه کنترل و ۱۲ نقطه چک، در نظر گرفته شد. برای اطمینان از نتایج، یکبار ۶۸ نقطه از ۱۰۸ نقطه و بار دیگر همه ۱۰۸ نقطه برای برآورد ضرایب مورد استفاده قرار گرفت. نتایج به‌دست آمده در این تحقیق، مبین موفقیت روش مینیمم شدن $RMSE$ روی نقاط چک، در انتخاب پارامتر پایدارسازی نسبت به روش منحنی L است. در ادامه نتایج حل ضرایب توابع گویا در قالب نمودار و جدول ارائه شده است. در جداول (۱ و ۲) و همچنین شکل‌های (۶ و ۷) مقادیر مولفه‌های خطای نقاط چک و شکل بردار خطا در روش پایدارسازی تیخونوف با دو روش تعیین پارامتر پایدارسازی منحنی L و مینیمم شدن $RMSE$ برای گروه ۵۵ نقطه‌ای مشاهده می‌شود. در این گروه نقاط می‌توان برتری روش پیشنهادی را نسبت به روش منحنی L در تعیین پارامتر پایدارسازی مشاهده کرد.

نرم بردار جواب $\|x\|_2$ در مقابل $\|Ax - b\|_2$ در مقیاس لگاریتمی رسم شود منحنی حاصل غالباً دارای شکلی L گونه است با بخشی که قسمت‌های افقی و قائم آن را از هم جدا می‌سازد. پارامتر بهینه پایدارسازی در این روش، نقطه‌ای از گراف $(\rho(\lambda), \eta(\lambda)) = \log \|Ax_\lambda - b\|_2, \log \|x_\lambda\|_2$ است که منحنی در آن حداکثر انحنا را دارد [۳]. شکل (۵) حالت کلی منحنی L را نشان می‌دهد.

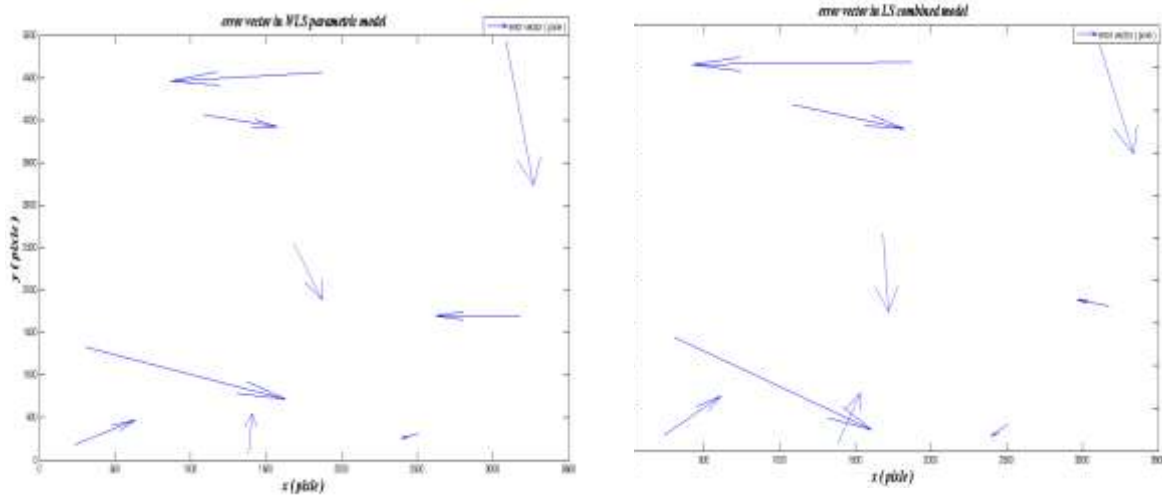


شکل ۵: منحنی L در تعیین پارامتر پایدارسازی روش تیخونوف [۵]

روش دومی که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفت انتخاب λ با روش سعی و خطا و بر اساس مینیمم شدن مقدار $RMSE$ روی نقاط چک می‌باشد. اساس این روش بر پایه آگاهی از نرم بردار باقیمانده‌ها می‌باشد.

جدول ۱: مولفه‌های خطا در گروه ۵۵ نقطه‌ای - پارامتر پایدارسازی تیخونوف به روش مینیمم شدن $RMSE$ در نقاط چک

	مدل پارامتری وزن دار با پایدارسازی تیخونوف (مینیمم $RMSE$)	مدل ترکیبی با پایدارسازی تیخونوف (مینیمم $RMSE$)
$RMSE(x, y), (pixel)$	۴/۴۵	۳/۴۲
$RMSE(x), (pixel)$	۳/۰۵	۲/۴۰
$RMSE(y), (pixel)$	۳/۲۴	۲/۴۳
$max(e_x), (pixel)$	۶/۰۵	۴/۵۸
$min(e_x), (pixel)$	۰/۱۱	۰/۱۰
$max(e_y), (pixel)$	۷/۷۵	۴/۵۲
$min(e_y), (pixel)$	۰/۰۱	۰/۰۶



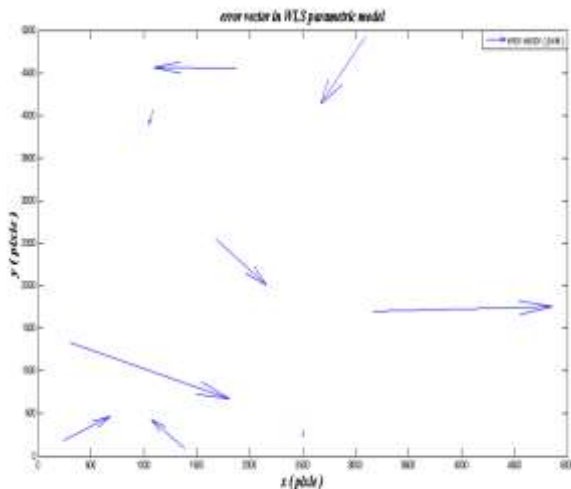
بردار باقیمانده مدل پارامتری وزن دار

بردار باقیمانده مدل ترکیبی

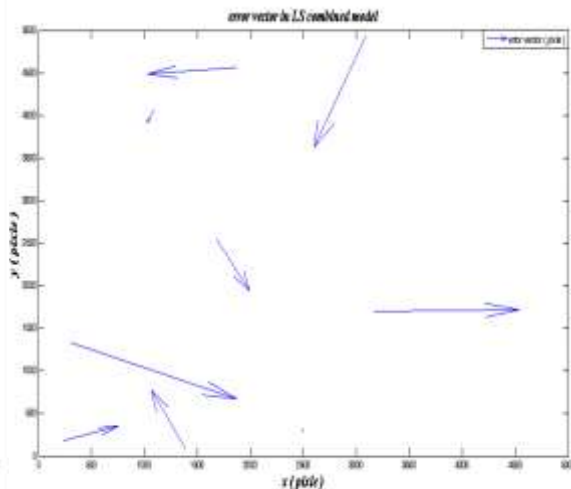
شکل ۶: بردار خطا در گروه ۵۵ نقطه‌ای - پارامتر پایداری تیخونوف به روش مینیمم شدن RMSE در نقاط چک

جدول ۲: مولفه‌های خطا در گروه ۵۵ نقطه‌ای - پارامتر پایداری تیخونوف به روش منحنی L

	مدل پارامتری وزن دار با پایداری تیخونوف (منحنی L)	مدل ترکیبی با پایداری تیخونوف (منحنی L)
$RMSE(x, y), (pixel)$	۵/۴۰	۵/۱۰
$RMSE(x), (pixel)$	۴/۸۳	۴/۱۳
$RMSE(y), (pixel)$	۲/۴۰	۲/۹۹
$max(e_x), (pixel)$	۹/۱۴	۷/۶۲
$min(e_x), (pixel)$	۰/۰۴	۰/۰۸
$max(e_y), (pixel)$	۴/۲۴	۶/۳۰
$min(e_y), (pixel)$	۰/۰۱	۰/۰۹



بردار باقیمانده مدل پارامتری وزن دار

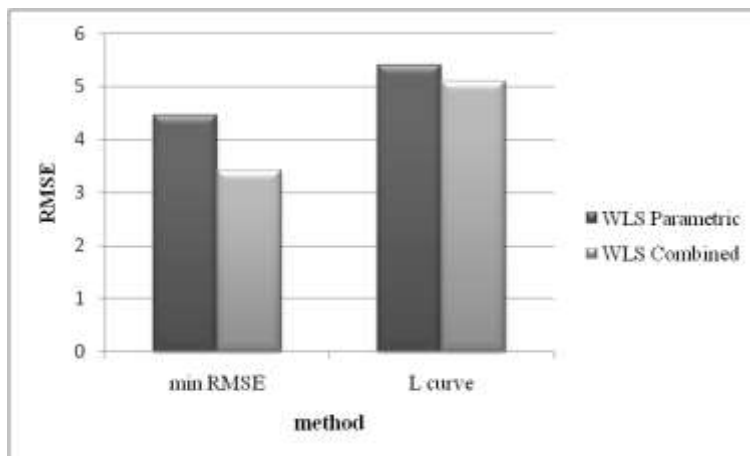


بردار باقیمانده مدل ترکیبی

شکل ۷: بردار خطا در گروه ۵۵ نقطه‌ای - پارامتر پایداری تیخونوف به روش منحنی L

نسبت به حالتی که λ با روش مینیمم شدن $RMSE$ در نقاط چک تعیین شده است دقت پایین تری دارند. شکل (۸) نیز مقادیر $RMSE$ برای گروه نقاط ۵۵ نقطه را به شکل مشخص تری نمایش می‌دهد.

مقایسه جدول (۱) و جدول (۲) نشان می‌دهد، دو روش سرشکنی کمترین مربعات مدل پارامتری وزن دار و مدل ترکیبی حل ضرایب توابع گویا که در آن‌ها پارامتر λ به وسیله منحنی L محاسبه شده است،



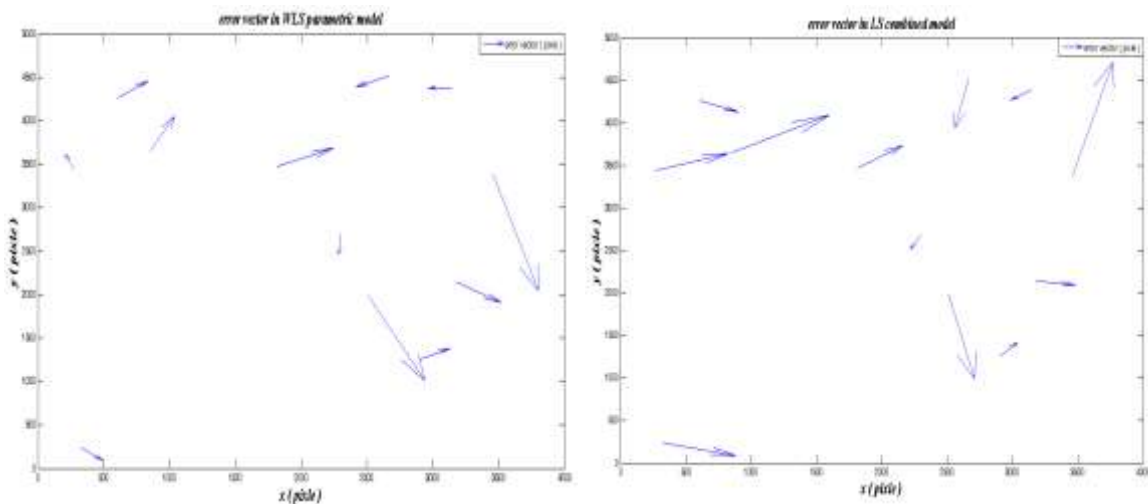
شکل ۸: $RMSE$ روش‌های پایداری برای ۵۵ نقطه

نشان می‌دهند. در این گروه نقاط نیز موفقیت روش مینیمم شدن $RMSE$ نسبت به روش منحنی L مشخص است.

جداول (۳) و (۴) و همچنین شکل‌های (۹) و (۱۰) به ترتیب مقادیر مؤلفه‌های آماری و بردار خطاهای دو روش مینیمم شدن $RMSE$ روی نقاط چک و منحنی L را در تعیین پارامتر پایداری برای گروه ۶۸ نقطه‌ای

جدول ۳: مولفه‌های خطا در گروه ۶۸ نقطه‌ای - تعیین پارامتر پایداری تیخونوف به روش مینیمم شدن RMSE در نقاط چک

	مدل پارامتری وزن دار با پایداری تیخونوف (مینیمم RMSE)	مدل ترکیبی با پایداری تیخونوف (مینیمم RMSE)
$RMSE(x, y), (pixel)$	۵/۲۰	۴/۹۶
$RMSE(x), (pixel)$	۳/۲۰	۳/۲۰
$RMSE(y), (pixel)$	۴/۱۰	۳/۷۹
$max(e_x), (pixel)$	۷/۵۰	۸/۴۷
$min(e_x), (pixel)$	۰/۱۳	۰/۱۴
$max(e_y), (pixel)$	۸/۶۳	۸/۴۹
$min(e_y), (pixel)$	۰/۱۳	۰/۱۲



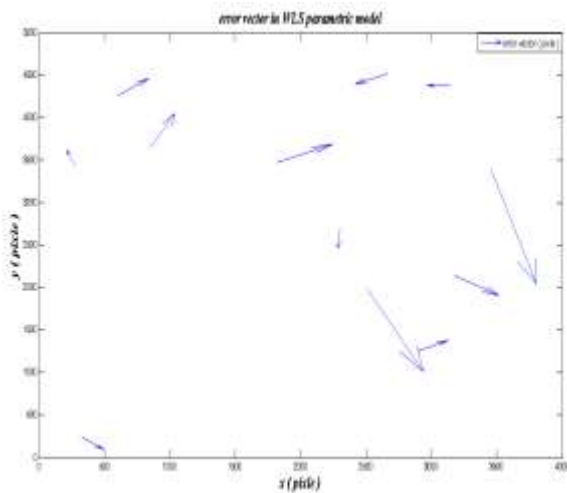
بردار باقیمانده مدل پارامتری وزن دار

بردار باقیمانده مدل ترکیبی

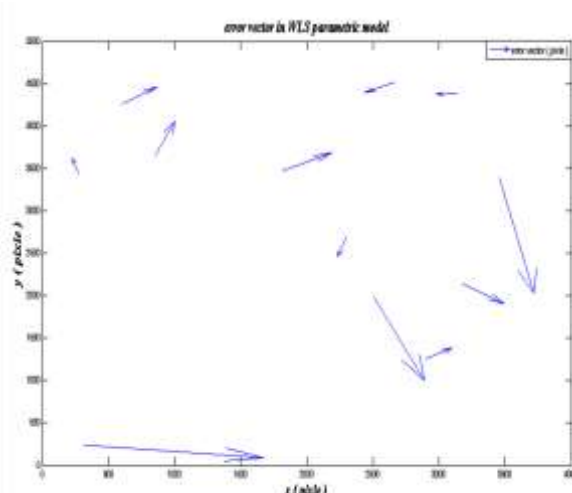
شکل ۹: بردار خطا در گروه ۶۸ نقطه‌ای - تعیین پارامتر پایداری تیخونوف به روش مینیمم شدن RMSE در نقاط چک

جدول ۴: مولفه‌های خطا در گروه ۶۸ نقطه‌ای - پارامتر پایداری تیخونوف به روش منحنی L

	مدل پارامتری وزن دار با پایداری تیخونوف (منحنی L)	مدل ترکیبی با پایداری تیخونوف (منحنی L)
$RMSE(x, y), (pixel)$	۶/۹۰	۵/۴۷
$RMSE(x), (pixel)$	۴/۵۶	۳/۴۶
$RMSE(y), (pixel)$	۵/۱۸	۴/۵۸
$max(e_x), (pixel)$	۱۲/۹۶	۶/۶۴
$min(e_x), (pixel)$	۰/۴۳	۰/۷۲
$max(e_y), (pixel)$	۱۲/۹۴	۹/۶۹
$min(e_y), (pixel)$	۰/۰۵	۰/۳۱



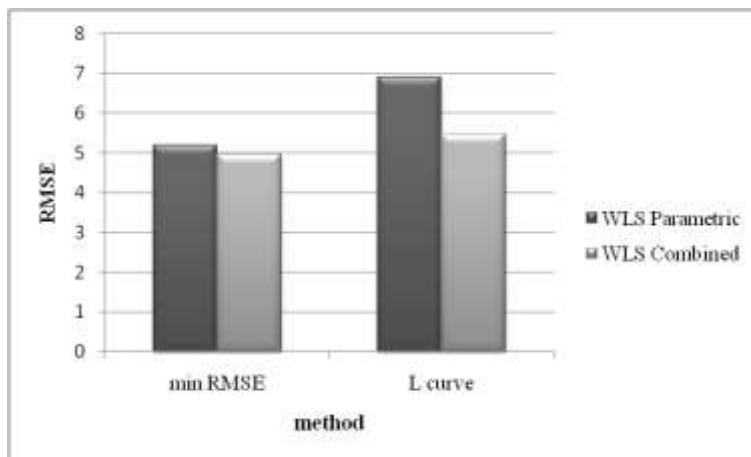
بردار باقیمانده مدل پارامتری وزن دار



بردار باقیمانده مدل ترکیبی

شکل ۱۰: بردار خطا در گروه ۶۸ نقطه‌ای - پارامتر پایداری تیخونوف به روش منحنی L

مقادیر $RMSE$ دو روش پایداری مورد استفاده برای سری نقاط ۶۸ تایی در شکل (۱۱) را می‌توان مشاهده کرد.



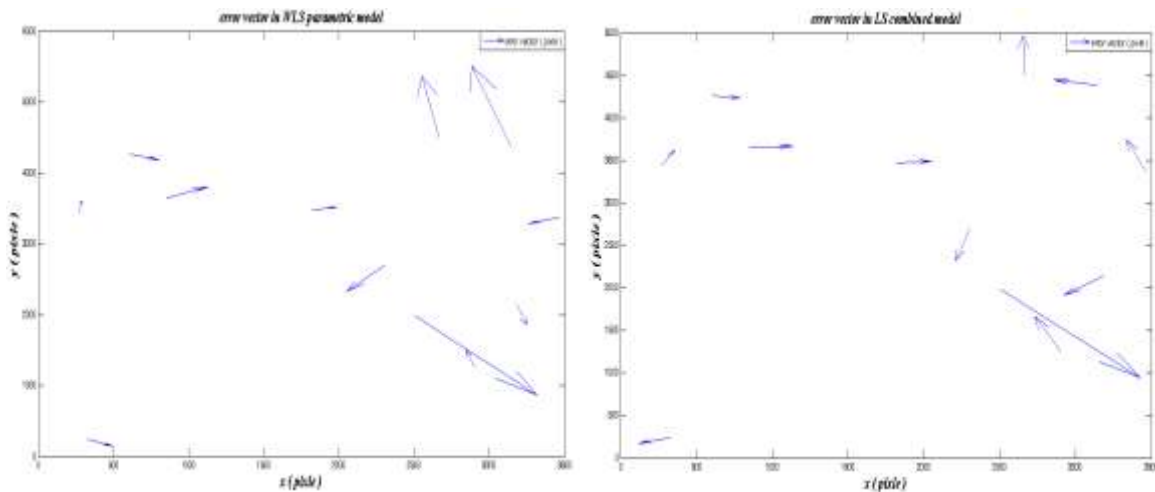
شکل ۱۱: $RMSE$ روش‌های پایداری برای ۶۸ نقطه

۱۰۸ نقطه‌ای نشان می‌دهند. در این گروه نقاط برخلاف دو گروه قبل مشاهده می‌شود هر دو روش تعیین پارامتر پایداری دارای عملکردی مشابه و نزدیک به هم هستند.

جداول (۵) و (۶) و همچنین شکل‌های (۱۲ و ۱۳) به ترتیب مقادیر مؤلفه‌های آماری و بردار خطاهای دو روش مینیمم شدن $RMSE$ روی نقاط چک و منحنی L را در تعیین پارامتر پایداری برای گروه

جدول ۵: مولفه‌های خطا در گروه ۱۰۸ نقطه‌ای - پارامتر پایداری سازی تیخونوف به روش مینیمم شدن RMSE در نقاط چک

	مدل پارامتری وزن دار با پایداری سازی تیخونوف (مینیمم RMSE)	مدل ترکیبی با پایداری سازی تیخونوف (مینیمم RMSE)
$RMSE(x,y), (pixel)$	۴/۹۷	۴/۹۵
$RMSE(x), (pixel)$	۳/۱۱	۳/۱۵
$RMSE(y), (pixel)$	۳/۸۸	۳/۸۲
$max(e_x), (pixel)$	۷/۲۱	۷/۵۳
$min(e_x), (pixel)$	۰/۱۰	۰/۰۷
$max(e_y), (pixel)$	۸/۵۸	۸/۵۳
$min(e_y), (pixel)$	۰/۰۹	۰/۰۴



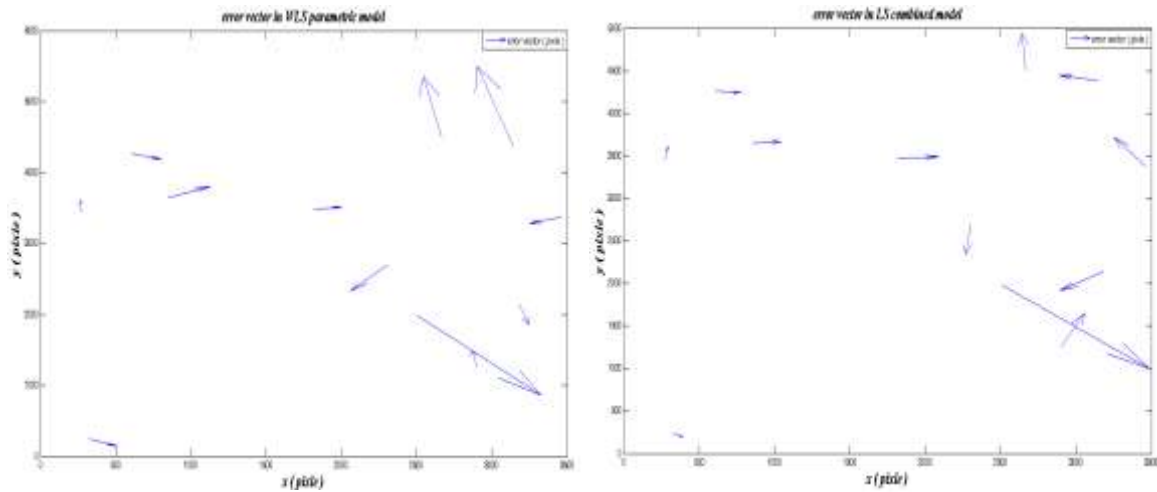
بردار باقیمانده مدل پارامتری وزن دار

بردار باقیمانده مدل ترکیبی

شکل ۱۲: بردار خطا در گروه ۱۰۸ نقطه‌ای - پارامتر پایداری سازی تیخونوف به روش مینیمم شدن RMSE در نقاط چک

جدول ۶: مولفه‌های خطا در گروه ۱۰۸ نقطه‌ای - تعیین پارامتر پایداری سازی تیخونوف به روش منحنی L

	مدل پارامتری وزن دار با پایداری سازی تیخونوف (منحنی L)	مدل ترکیبی با پایداری سازی تیخونوف (منحنی L)
$RMSE(x,y), (pixel)$	۴/۷۱	۴/۴۹
$RMSE(x), (pixel)$	۲/۸۴	۳/۰۰
$RMSE(y), (pixel)$	۳/۷۶	۳/۳۴
$max(e_x), (pixel)$	۷/۵۰	۸/۴۷
$min(e_x), (pixel)$	۰/۱۴	۰/۱۴
$max(e_y), (pixel)$	۹/۰۶	۸/۴۹
$min(e_y), (pixel)$	۰/۳۶	۰/۱۲



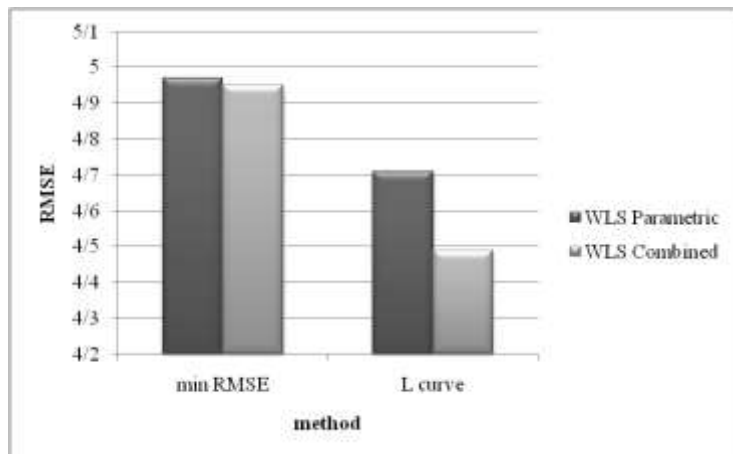
بردار باقیمانده مدل پارامتری وزن دار

بردار باقیمانده مدل ترکیبی

شکل ۱۳: بردار خطا در گروه ۱۰۸ نقطه‌ای - تعیین پارامتر پایداری تیخونوف به روش منحنی L

می توان مناسب بودن روش پیشنهادی را نسبت به روش منحنی L در تعیین پارامتر پایداری تیخونوف را مشاهده نمود.

مقادیر $RMSE$ سری نقاط ۱۰۸ تایی در شکل (۱۴) برای دو روش پایداری مورد استفاده نمایش داده شده است. با توجه به این شکل نیز



شکل ۱۴: $RMSE$ روش های پایداری برای ۱۰۸ نقطه

x و y عکسی به طور جداگانه ارائه می شوند. در روش مینیمم شدن $RMSE$ مقدار پارامتر پایداری در دو مدل سرشکنی برای هر دو گروه داده مقدار 0.02 به دست آمد. در روش منحنی L به علت وابستگی این روش به تعداد نقاط کنترل، پارامتر پایداری مقادیر متفاوتی داشت که این مقادیر در قالب جداول زیر ارائه شده است. از مقایسه مقادیر جدول (۷، ۸ و ۹) و مقدار پارامتر

با توجه به نتایج به دست آمده در جدول های (۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶) مشاهده می شود که روش مینیمم شدن $RMSE$ در نقاط چک برای انتخاب پارامتر پایداری روش تیخونوف نسبت به روش منحنی L ، به تعداد نقاط کنترل وابستگی خیلی کمتری دارد. لازم به ذکر است، در این پژوهش محاسبه ضرایب توابع گویا برای مولفه های عکسی به طور جداگانه انجام شد. لذا مقادیر پارامتر پایداری به دست آمده برای مولفه

این امر نیز به نحوی نتایج حاصل از جداول (۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶) را تأیید می‌کند.

پایداری با روش مینیمم $RMSE$ در نقاط چک، نزدیک بودن مقادیر پارامتر پایداری هر دو روش تعیین پارامتر پایداری در حالتی که تعداد نقاط کنترل ۱۲۰ عدد می‌باشد را می‌توان مشاهده کرد که

جدول ۷: پارامتر پایداری در گروه ۵۵ نقطه کنترل به روش منحنی L

	پارامتر پایداری در منحنی L (مولفه x عکسی)	پارامتر پایداری در منحنی L (مولفه y عکسی)
مدل پارامتری وزن دار (۵۵ نقطه کنترل)	۰/۰۰۰۸۰۳۶	۰/۰۰۳۳۹۲۸
مدل ترکیبی (۵۵ نقطه کنترل)	۰/۰۰۰۸۰۳۶	۰/۰۰۳۳۹۲۸

جدول ۸: پارامتر پایداری در گروه ۶۸ نقطه کنترل به روش منحنی L

	پارامتر پایداری در منحنی L (مولفه x عکسی)	پارامتر پایداری در منحنی L (مولفه y عکسی)
مدل پارامتری وزن دار (۶۸ نقطه کنترل)	۰/۰۰۲۷۲	۰/۰۰۰۰۸۳
مدل ترکیبی (۶۸ نقطه کنترل)	۰/۰۰۳۷۴	۰/۰۰۰۰۷۶

جدول ۹: پارامتر پایداری در گروه ۱۲۰ نقطه کنترل به روش منحنی L

	پارامتر پایداری در منحنی L (مولفه x عکسی)	پارامتر پایداری در منحنی L (مولفه y عکسی)
مدل پارامتری وزن دار (۱۰۸ نقطه کنترل)	۰/۰۳۷۰۶۴	۰/۰۲۷۳۴
مدل ترکیبی (۱۰۸ نقطه کنترل)	۰/۰۳۷۰۶۴	۰/۰۲۷۳۴

مدل‌های پارامتری و ترکیبی به ترتیب ۵/۴۰ پیکسل و ۵/۱۰ پیکسل می‌باشند. در این گروه مشاهده می‌شود که روش مینیمم شدن $RMSE$ روی نقاط چک عملکرد بهتری دارد. در گروه ۶۸ نقطه‌ای، در روش مینیمم شدن $RMSE$ روی نقاط چک، به ترتیب مقادیر ۵/۲۰ و ۴/۹۶ پیکسل در مدل پارامتری و مدل ترکیبی و برای روش منحنی L مقادیر ۶/۹۰ و ۵/۴۷ پیکسل در مدل پارامتری و مدل ترکیبی حاصل شد. در این گروه نقاط نیز روش مینیمم شدن $RMSE$ در تعیین پارامتر پایداری نسبت به روش منحنی L عملکرد بهتری دارد. در نهایت با در نظر گرفتن ۱۰۸ نقطه کنترل برای برآورد ضرایب توابع گویا مقدار $RMSE$ در روش پیشنهادی برای تعیین پارامتر پایداری در مدل پارامتری وزن دار ۴/۹۷ پیکسل و در مدل ترکیبی ۴/۹۵ پیکسل است و همچنین استفاده از روش منحنی L

۴- نتیجه گیری

نتایج حاصل از این تحقیق نشان داده است، در هنگام استفاده از روش پایداری در زمین مرجع نمودن تصاویر ماهواره‌ای تعیین پارامتر پایداری از اهمیت زیادی برخوردار است. برای این منظور محاسبات در دو حالت و روی سه گروه نقاط انجام شد. حالت اول استفاده از روش مینیمم شدن $RMSE$ روی نقاط چک و حالت دوم استفاده از روش منحنی L است. با در نظر گرفتن گروه ۵۵ نقطه، مقدار $RMSE$ در مدل پارامتری وزن دار و مدل ترکیبی به ترتیب ۴/۴۵ پیکسل و ۳/۴۲ پیکسل برای روش مینیمم شدن مقدار $RMSE$ روی نقاط چک به دست آمد. در صورتی که در همین گروه نقاط و استفاده از روش منحنی L در تعیین پارامتر پایداری، مقادیر $RMSE$

خطوط برداشتی عمود بر مسیر حرکت قرار می‌گیرد. در این نوع سنجنده‌ها خطای کشیدگی تصویر در راستای خط پرواز قرار دارد. در شکل‌هایی که نشان‌دهنده بردار خطاها می‌باشد می‌توان تأثیر این خطای سیستماتیک را در مؤلفه x تصویری مشاهده کرد. این نوع خطاها که در فضای تصویری وجود دارند به‌طور معمول در تصحیح هندسی تصاویر ماهواره‌ای با اضافه کردن ترم‌هایی به مختصات‌های تصویری برآورد می‌شوند. در این روش تصحیح هندسی تصاویر، ابتدا با ضرایب اولیه و کم دقت موجود در فایل تصاویر این ترم‌ها در فضای تصویری تصحیح می‌شوند و سپس مختصات تصویری جدید برای برآورد ضرایب توابع گویا مورد استفاده قرار می‌گیرند. این ترم‌های اضافه شده به مختصات تصویری تحت عنوان پارامترهای تبدیل کانفورمال و یا پارامترهای تبدیل افاین شناخته می‌شوند. در نهایت پیشنهاد می‌شود برای رسیدن به آنالیز دقیق‌تر، روش پیشنهادی مقاله را در مناطق با وضعیت‌های مختلف توپوگرافی و همچنین تعداد نقاط کنترل با پراکندگی بیشتر در انواع تصاویر ماهواره‌ای مورد بررسی قرار داد.

مقادیر $4/71$ پیکسل را برای مدل پارامتری وزن دار و $4/49$ پیکسل را برای مدل ترکیبی نشان می‌دهد در این حالت مسئله دارای درجه آزادی بیشتری نسبت به حالت اول است. با توجه به نتایج ارائه شده مشاهده می‌شود که تعیین پارامتر پایداری به روش منحنی L به تعداد نقاط کنترل وابسته است و هنگام استفاده از نقاط کنترل کم، این روش از دقت مناسبی برخوردار نیست و روش مینیمم شدن $RMSE$ در تعیین پارامتر پایداری روش مناسب‌تری می‌باشد. در انتخاب نقاط کنترل در فرایند زمین مرجع کردن تصاویر قدرت تفکیک بالا به دلیل محدودیت‌هایی مانند توپوگرافی منطقه و هزینه بالای ایجاد این نقاط، همیشه امکان استفاده از نقاط کنترل زیاد وجود ندارد. همچنین در پروژه‌های عملیاتی استفاده از تعداد نقاط کنترل بهینه تأثیر زیادی در هزینه و زمان اجرای پروژه دارد. با این تفاسیر لازم است در استفاده از توابع گویا به عنوان مرحله ابتدایی فرایند استخراج مختصات سه بعدی از تصاویر ماهواره‌ای قدرت تفکیک بالا و انتخاب روش تعیین پارامتر پایداری در این روش، با دقت بیشتری عمل کرد.

تصاویر سنجنده ژئوآی-1 در رده سنجنده‌های خطی با

مراجع

- [1] C.S. Fraser, and H. B. Hanley, "Bias compensated RPCs for sensor orientation of high-resolution satellite imagery". Photogrammetric Engineering and Remote sensing, Vol. 71, No.8, pp.909-915, 2005.
- [2] H.B. Hanley, T. Yamakawa, and C.S. Fraser, "sensor orientation for high resolution satellite imagery", Pecora 15/Land Satellite Information IV/ISPRS Commission I/FIEOS Conference Proceedings, 2002.
- [3] M.J. Valadan Zoj, M. Mokhtarzade, A. Mansourian, H. Ebadi, and S. Sadeghian, "Rational function optimization using genetic algorithms", Int. J. Appl. Earth Obs. Geoinf, Vol. 9, pp. 403-413, 2007.
- [4] Y. Hu, V. Tao, and A. Croitoru, "Understanding the rational function model: methods and applications", International archives of photogrammetry remote sensing and spatial information sciences, Vol.35, No.4, pp.663-668, 2004.
- [5] M.A. Sharifi, B. Amjadiparvar, and M. Sheybani, "A new method for estimating Rational Function Coefficients" Journal of Earth and Space Physics Vol. 68, No.1, pp. 91 - 108, 2010.
- [6] C. V. Tao, and Y. Hu, "Use of the rational function model for image rectification", Can. J. Rem. S, Vol. 27, No. 6, pp 593-602. 2001A.
- [7] Y. Hu, and C. V. Tao, "Updating solutions of the rational function model using

- additional control points and enhanced photogrammetric processing”, *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing* Vol. 68, No.7, pp. 715-723 , 2002.
- [8] Dial, Gene and J. Grodecki, “Block Adjustment with Rational Polynomial Camera Models.” *Proceedings of ASPRS Conference*, Washington, DC, 22-26, 2002.
- [9] C.S. Fraser, and H. B. Hanley, “Bias compensation in Rational Functions for Ikonos satellite imagery.” *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, Vol. 69, No. 1, pp. 53-57, 2003.
- [10] Y. Meguro , C.S.Fraser, “ Georeferencing accuracy of GeoEye-1 stereo imagery: experiences in a Japanese test field”, *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Science*, Volume XXXVIII, Part 8, Kyoto Japan 2010.
- [11] Y. Shen , C. Li , G. Qiao , and S. Liu, “Accuracy analysis of HRSI- based ge positioning using least-squares collocation”, *International Archives of the Photogrammetry Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, XXXIX-B1, 273-276, 2012.
- [12] J. Grodecki, G. Dial, and J. Lutes, “Mathematical model for 3D feature extraction from multiple satellite images described by RPCs”, presented at the ASPRS Conference, Denver, 2004
- [13] P. Vanichek, and E. Krakiwsky, *Geodesy the concepts.. North- holland*, 1986.
- [14] P. C. Hansen, “Numerical tools for analysis and solution of Fredholm integral equations of the first kind” *Inverse Problems*, Volume 8, No. 6, pp. 849-872, 1992.
- [15] P. C. Hansen, “The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems” ed. / P. Johnston. WIT Press, p. 119-142, 2001.
- [16] A . Safari, Y.Allhtavakoli, “A Comparison of direct and indirect regularization methods for downward continuation problem of geoid computations without applying Stokes formula” *Journal of Earth and Space*
- Physics Vol. 34, No.1, pp. 89 – 101, 2008.



Determining regularization parameter in high resolution images georeferencing with Rational Functions

Amir Zafari¹, Alireza Amiri Simkooei², Mehdi Momeni³

1- Ms.c student of geodesy in Department of Geomatics, Faculty of Engineering, University of Isfahan

2- Assistant professor in Department of Geomatics, Faculty of Engineering, University of Isfahan

3- Assistant professor in Department of Geomatics, Faculty of Engineering, University of Isfahan

Abstract

High-resolution satellite images are extensively used in different fields. Geo-referencing process, as innate part of extraction of topographic terrains through these images, has been studied in many researches. In geo-referencing of satellite images, different models can be used, but rational functions are the most suitable options. Determining co-efficiency of rational functions is ill-condition problem, so to solve this problem Tikhonov regularization method has been used. In such regularization method, regularization selection parameter is very important. In present study, this parameter was calculated through two methods including: minimizing root mean square of errors (RMSE) and the L-curve for determining co-efficiency of rational functions. Then these two methods have been used in least standard squares of parametric model. Also combined model has been used to determine co-efficiency of rational functions in geo-referencing process. These calculations have been done for two different control-points groups with various numbers and accuracies. Using these two models (parametric and combined), regularization parameter has been calculated through L-curve and root mean square of error methods by 55 points. The results show that the root mean square errors and L-curve methods in parametric model led to accuracy of 4.45 and 5.40 pixels, respectively. Also in the combined model, root mean square errors and L-curve methods showed accuracy of 3.42 and 5.10 pixels, respectively. Above calculations were repeated with 120 points. This time, results show approximately same accuracies for both root mean square errors and L-curve methods.

Key words: High-Resolution Satellite Images, Rational Function, Ill-ondition Problem, regularization, L-curve.

Correspondence Address: Geodesy Group, Department of Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

Tel: +98 9127975071

Email: amirzafari.eng@gmail.com