نشریه علمی پژوهشی مهندسی فناوری اطلاعات مکانی

سال پنجم، شماره نخست، بهار ۱۳۹۶

Vol.5, No.1, Spring 2017

۳۹-۴۸

معرفی تلفیق طیفی اسلپین کروی و بررسی آن بر روی مدل‌های جهانی و منطقه‌ای یونسفری

حسین اعتمادفرد[1*]، مسعود مشهدی حسینعلی[2]

۱- دانشجوی دکتری مهندسی نقشه‌برداری، گروه ژئودزی دانشکده نقشه‌برداری دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی

۲- دانشیار گروه ژئودزی دانشکده نقشه‌برداری دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی

تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۴/۱۲/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۲/۲۹

چکیده

یکی از مشکلات حاکم بر مدل‌های یونسفری موجود، عدم تعامل و فقدان قابلیت ترکیب بین مدل‌هاست. این تحقیق به بررسی نحوه برهمکنش بین مدل‌های جهانی و منطقه‌ای یونسفری مبتنی بر توابع پایه ریاضی پرداخته است. ازآنجایی‌که توابع پایه اسلپین کروی قابلیت تعریف بر روی کل کره (مدل جهانی) و بخش از کره (مدل منطقه‌ای) را دارند، مبنای تلفیق طیفی قرار گرفته‌اند. دو دسته توابع پایه اسلپین کروی با ضرایب مختلف برای تلفیق طیفی (ترکیب مدل‌ها) مفروض هستند. ضرایب یک دسته که مربوط به مدلسازی با داده‌های منطقه‌ای (مدلسازی مستقیم) است؛ از مدلسازی توسط ایستگاه‌های محلی به‌دست‌آمده‌اند. دسته دیگر حاصل از ضرایب هارمونیک‌های کروی و یا تبدیل یافته مدل هارمونیک کروی به اسلپین کروی (مدلسازی غیرمستقیم) در یک زیرفضای مکانی برابر با دسته اول است.به‌منظور پیاده‌سازی تئوری تلفیق طیفی، درجه و مرتبه بیشینه مطابق با محصولات یونسفری سرویس‌های بین‌المللی برابر با ۱۵ در نظر گرفته‌شده است. محدوده جغرافیایی مطالعاتی نیز محدوده قطب شمال فرض شده‌است؛ که تقریبا عرض‌های جغرافیایی بالاتر از ۶۰ درجه را به‌صورت کلاهک کروی پوشش می‌دهد. فرآیند درستی آزمایی با مشاهدات گیرنده‌های دو فرکانسه ۳ ایستگاه مشاهداتی که در مدلسازی جهانی و مستقیم حضور نداشته‌اند، انجام‌شده است. ریشه میانگین مربعات خطاهای حاصل از درستی آزمایی برای مدل‌های جهانی، غیرمستقیم، مستقیم و تلفیقی به ترتیب، ۳/۷، ۲/۲، ۱/۹ و ۱/۴ واحد محتوای کلی الکترونی می‌باشد. به‌عبارت‌دیگر، نتایج تلفیق طیفی مدل‌های مستقیم و غیرمستقیم نشان از صحت بیشتر این نوع مدل‌سازی دارد. با تلفیق طیفی می‌توان اثرات تعداد کم ایستگاه‌ها در مدل‌سازی غیرمستقیم و توزیع نامناسب ایستگاه‌ها در مدل‌سازی مستقیم را کم کرد. بنابراین خطای روش تلفیقی به‌صورت کلی کمتر از دو روش دیگر است.

واژه‌های کلیدی: تلفیق طیفی، اسلپین کروی، یونسفر.

* نویسنده مکاتبه کننده: : تهران، خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع میرداماد، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.

تلفن: ۸۸۷۸۶۲۱۲-۰۲۱

Email: hossein_etemadfard@yahoo.com

[Downloaded from jgit.kntu.ac.ir on 2026-11-16]

[DOI: 10.29252/jgit.5.1.39]

۱- مقدمه

معمولا مدل‌های متعددی برای رفتار یک پدیده طبیعی معرفی می‌شوند. این مدل‌ها می‌توانند مبتنی بر مکانیزم‌های فیزیکی، مشاهدات روابط تجربی و یا مدل‌های صرفا ریاضی باشند. یکی از مشکلات حاکم بر مدل‌های موجود، عدم تعامل و فقدان قابلیت ترکیب بین مدل‌هاست. به‌عبارت دیگر نمی‌توان از ترکیب مدل‌های موجود به مدلی مناسب‌تر برای تخمین رفتار پدیده‌ها رسید.

برخی از مدل‌های فیزیکی تنها با پاره‌ای از مشاهدات ورودی مدلسازی انجام می‌دهند و قابلیت استفاده از دیگر مدل‌ها را ندارند. از طرف دیگر مدل‌های تجربی با داده‌های ویژه و در بازه‌های زمانی خاصی مورد اعتماد هستند. مضاف بر دو دسته فوق مدل‌های ریاضی نیز صرفا بر اساس تعریف توابع پایه شکل می‌گیرند؛ که تنوع در توابع پایه آن‌ها، احتمال ترکیب و تلفیق بین آن‌ها را کاهش می‌دهد. در ضمن موارد فوق را می‌توان به مدل‌های جهانی و منطقه‌ای نیز تقسیم‌بندی کرد. در این صورت تعامل و ترکیب مدل‌ها روند پیچیده‌تری را می‌گیرد. در این تحقیق بررسی نحوه برهمکنش بین مدل‌های جهانی و منطقه‌ای مبتنی بر توابع پایه ریاضی مورد توجه قرار گرفته است.

به‌منظور بررسی دقیق‌تر، در این تحقیق به رفتار یونسفر به‌عنوان لایه بسیار مهم در مطالعات جوی پرداخته‌شده است. یونسفر به‌عنوان لایه‌ای از اتمسفر با الکترون‌های آزاد، شناخته می‌شود. این لایه از ارتفاع ۷۰ کیلومتری سطح زمین شروع و تقریبا تا ۱۰۰۰ کیلومتری آن ادامه می‌یابد. مدلسازی رفتار این لایه به دلیل تاثیر زیاد بر روی مشاهدات سیستم‌های تعیین موقعیت ماهواره‌ای از اهمیت بسیاری برخوردار است. به همین دلیل مدل‌های یونسفری زیادی تولید، پیش‌بینی و عرضه می‌شوند.

همانند دسته‌بندی فوق، این مدل‌ها نیز معمولا به سه دسته فیزیکی، تجربی و ریاضی تقسیم‌بندی می‌شوند؛ که می‌توان برای هر یک نمونه‌هایی را ذکر کرد. به دلیل نبود فضای قیاس و مبنای یکسان، بدون شک ترکیب مدل‌های یونسفری با مبناهای متفاوت ممکن نیست. به‌عنوان مثال نمی‌توان مدلی تجربی را با مدلی فیزیکی ترکیب کرد. از طرف دیگر حتی در مدل‌های ریاضی هم امکان ترکیب وجود ندارد. به‌عنوان مثال نمی‌توان مدل مبتنی بر توابع پایه هارمونیک کروی را با مدل ایجاد شده بر اساس توابع پایه مثلثاتی کروی ترکیب کرد؛ چرا که توابع پایه هارمونیک‌های کروی جواب حاصل از حل معادله لاپلاس روی کره است؛ در حالی که توابع کروی این خاصیت را ندارند. نمونه مذکور یکی از بهترین نمونه‌هایی است که توابع پایه قرابت مبنایی ظاهری بسیار زیادی با هم داشته ولی بازهم قابلیت ترکیب ندارند.

این تحقیق به دنبال بررسی امکان ترکیب دو مدل ریاضی جهانی و مدل ریاضی منطقه‌ای است. تنها ترکیب دو مدل در فضایی ممکن است که مبنای توابع یکی باشند. اینجاست که بایستی به دنبال توابعی بود که ویژگی تعریف جهانی و منطقه‌ای را در خود داشته باشند. تئوری تمرکز مکان طیفی به‌صورت بهینه در منطقه مدنظر بر روی سیگنال‌های با باند طیفی محدود تعریف‌شده است. این تئوری می‌تواند فضای مناسبی جهت ترکیب توابع پایه مدل‌های جهانی و منطقه‌ای فراهم نماید. اولین مطالب در تعریف تئوری تمرکز طیفی توسط دیوید اسلپین[1] و همکاران در طی سال‌های ۱۹۶۱ تا ۱۹۷۸ به‌صورت مجموعه مقالاتی منتشر شد[۱، ۲، ۳ و ۴]. این مجموعه مقالات به بررسی مساله تمرکز طیفی در یک بعد پرداخته‌اند. در مطالعات اخیر در این زمینه سیمونز و همکاران در سال ۲۰۰۶ تئوری اسلپین را برای هارمونیک‌های کروی باند محدود بسط دادند[۵، ۶ و ۷].

در این تحقیق دو دسته توابع اسلپین کروی با

[1] Slepian

[Downloaded from jgit.kntu.ac.ir on 2026-11-16]
[DOI: 10.29252/jgit.5.1.39]

ضرایب مختلف برای تلفیق طیفی (ترکیب مدل‌ها) مفروض هستند. ضرایب یک دسته، مربوط به مدلسازی با داده‌های منطقه‌ای است. جزئیات این روش و نحوه مدلسازی آن در مقاله‌ای تحت عنوان اسلپین کروی به‌عنوان یک روش جدید جهت مدلسازی یونسفر در قطب شمال آمده است[۸]. دسته دیگر حاصل از ضرایب هارمونیک‌های کروی و یا تبدیل یافته مدل هارمونیک کروی به اسلپین در یک زیرفضای مکانی برابر با دسته اول است[۹]. این دسته را می‌توان از مدل‌های هارمونیک کروی موجود که توسط سرویس‌های بین‌المللی در اختیار کاربران قرار می‌گیرند، محاسبه کرد. این پژوهش تلفیق طیفی این دو مدل با ضرایب مختلف را پیشنهاد می‌دهد که به نام تلفیق طیفی اسلپین کروی معرفی می‌شود. تئوری و روش انجام تلفیق طیفی اسلپین کروی برای نخستین بار در این تحقیق معرفی و مورد بررسی قرار گرفته است.

در بخش دوم این تحقیق ابتدا به معرفی دو روش مدلسازی برای توابع پایه اسلپین پرداخته و سپس روش ترکیب آن‌ها توضیح داده می‌شود. بخش سوم به پیاده‌سازی این روش در ناحیه قطب شمال به‌عنوان مورد مطالعاتی اختصاص داشته و در آخر هم جمع‌بندی و نتیجه‌گیری آورده شده است.

۲- تئوری مسئله

در این بخش ابتدا تعریف تئوری اسلپین کروی مورد بحث قرار گرفته و سپس روش‌های محاسبه ضرایب مربوط به توابع اسلپین کروی آورده می‌شود. در زیربخش ۲-۱ نحوه محاسبه توابع پایه اسلپین کروی از توابع هارمونیک کروی مورد تعریف قرار می‌گیرد. در ادامه چگونگی برآورد ضرایب نظیر آن‌ها از ضرایب هارمونیک کروی مدل‌های جهانی بررسی می‌شود. در اینجا این نوع مدلسازی را مدلسازی غیر مستقیم می‌نامیم. در زیربخش ۲-۲ به مدلسازی یونسفر با توابع پایه اسلپین کروی و مشاهدات دو فرکانسه سامانه تعیین موقعیت جهانی[1] پرداخته می‌شود. در این تحقیق این روش را مدلسازی مستقیم نام‌گذاری کرده‌ایم. زیر بخش ۲-۳ نیز به روش تلفیق طیفی بین این دو مدل اختصاص داده‌شده است.

۲-۱- مدل اسلپین از توابع هارمونیک کروی:

در اینجا توابع هارمونیک کروی و ضرایب آن به‌عنوان گام نخست کار قرار می‌گیرند. توابع هارمونیک کروی ترکیبی از بسط سری فوریه مثلثاتی روی طول جغرافیایی و تابع لژاندر روی عرض جغرافیایی به‌عنوان توابع پایه متعامد روی سطح کره شناخته‌شده هستند. بیان ریاضی مولفه قائم محتوای کلی الکترونی[2] (VTEC) با استفاده از توابع هارمونیک کروی به شکل رابطه (۱) می‌باشد[۱، ۲، ۳ و ۴]:

رابطه (۱)

$$VTEC(\theta_{IPP},\lambda_{IPP})=\sum_{l=0}^{K}\sum_{m=-l}^{l}\psi_{lm}Y_{lm}(\theta_{IPP},\lambda_{IPP})$$

رابطه (۲)

$$Y_{lm}(\theta_{IPP},\lambda_{IPP})=\begin{cases}\sqrt{2}X_{lm}(\theta_{IPP})\cos(m\lambda_{IPP}) & \text{if}\quad 0<m\le l\\ X_{l0}(\theta_{IPP}) & \text{if}\quad m=0\\ \sqrt{2}X_{lm}(\theta_{IPP})\sin(m\lambda_{IPP}) & \text{if}\quad -l\le m<0\end{cases}$$

رابطه (۳)

$$X_{lm}(\theta_{IPP})=(-1)^{m}\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2}\left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}P_{lm}(\cos\theta_{IPP})$$

$$P_{lm}(\mu)=\frac{1}{2^{l}l!}\left(1-\mu^{2}\right)^{m/2}\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{l+m}(1-\mu)^{l}$$

رابطه (۴)

در اینجا P_{lm} تابع لژاندر است. مبنای تعریف توابع پایه هارمونیک کروی بر روی سطح کره اجازه نوشتن رابطه (۵) را می‌دهد:

$$\int_{\Omega}Y_{lm}Y_{l'm'}d\Omega=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

رابطه (۵)

[1] Global Positioning System (GPS)
[2] Vertical Total Electron Content (VTEC)

[Downloaded from jgit.kntu.ac.ir on 2026-11-16]
[DOI: 10.29252/jgit.5.1.39]

اینجا δ دلتای کرونکر، Ω سطح کره و $d\Omega$ المان سطحی انتگرال‌گیری می‌باشند. ازآنجایی‌که رابطه (۵) فقط و فقط بر روی تمامی سطح کره صدق می‌کند، قطعا توابع مربوط به هارمونیک‌های کروی روی بخشی از کره متعامد نیستند. حال مسئله این است که بایستی به دنبال متعامد کردن توابع و بهینه کردن تمرکز آن‌ها در سطح منطقه مدنظر بود. بدین منظور تئوری اسلپین می‌تواند کارگشا باشد. تئوری اسلپین به دنبال به حداقل رساندن انرژی یک سیگنال بیرون منطقه مدنظر و یا به‌عبارت‌دیگر ماکزیمم کردن انرژی سیگنال‌های داخل منطقه مذکور است. این تئوری توسط سیمونز بر روی هارمونیک‌های کروی بدین‌گونه بیان شد که نسبت انرژی بر روی بخشی از سطح کره به انرژی بر روی کل کره ماکزیمم شود[۵]. بر اساس تعاریف، این تئوری به‌صورت رابطه (۶) فرموله می‌شود[۸]:

رابطه (۶)

$$\beta=\frac{\left\|VTEC(\theta_{IPP},\lambda_{IPP})\right\|_R^2}{\left\|VTEC(\theta_{IPP},\lambda_{IPP})\right\|_\Omega^2}=\frac{\int_R VTEC^2(\theta_{IPP},\lambda_{IPP})\,\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega VTEC^2(\theta_{IPP},\lambda_{IPP})\,\mathrm{d}\Omega}=\max.$$

در اینجا R سطح منطقه مدنظر و β میزان نسبت تمرکز انرژی سیگنال‌های داخل منطقه به انرژی سیگنال‌های روی کل کره، بر مبنای نسبت فوق $0<\beta<1$ می‌باشند. که البته با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه فوق

رابطه (۱۱)

$$X_{lm}(\theta_{IPP})X_{l'm}(\theta_{IPP})=(-1)^m\sum_{n=|l-l'|}^{l+l'}\sqrt{\frac{(2n+1)(2l+1)(2l'+1)}{4\pi}}\times\begin{pmatrix}l & n & l'\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l & n & l'\\ m & 0 & -m\end{pmatrix}X_{n0}(\theta_{IPP})$$

در این رابطه آرایه‌های فوق نماد ویگنر 3j [1] هستند[۱۰]. پس از محاسبه ماتریس D_m بایستی آن را به مقدارها و بردارهای ویژه تبدیل کرد:

رابطه (۱۲) $D_m=V_m\Lambda_m V_m^{-1}$

در این رابطه V_m بردارهای ویژه و Λ_m مقدارهای ویژه برای مرتبه m در درجات از m تا l می‌باشد.

خواهیم داشت:

$$\beta=\frac{\sum_{l=0}^{K}\sum_{m=-l}^{l}\psi_{lm}\sum_{l'=0}^{K}\sum_{m'=-l'}^{l'}D_{lm,l'm'}\psi_{l'm'}}{\sum_{l=0}^{K}\sum_{m=-l}^{l}\psi_{lm}^2}$$

رابطه (۷)

در اینجا می‌توان گفت:

$$D_{lm,l'm'}=\int_R Y_{lm}Y_{l'm'}d\Omega$$

رابطه (۸)

رابطه (۸) را می‌توان به‌گونه‌ای دیگر از رابطه (۵) استخراج کرد. ماتریس D ماتریسی با ابعاد $(l+1)^2\times(l+1)^2$ می‌باشد. البته لازم به ذکر است که اگر رابطه فوق به‌صورت ماتریسی نوشته شود، می‌توان همان مسئله جبری مقادیر ویژه را استخراج کرد[۵]. یعنی:

رابطه (۹) $\lambda\psi=D\psi$

از این پس به دنبال شیوه محاسبه ماتریس D خواهیم‌بود. ماتریس D را می‌توان به زیرماتریس‌هایی به شکل رابطه (۱۰) تقسیم کرد[۵].

رابطه (۱۰) $D=\mathrm{diag}\{D_0,D_1,D_1,...,D_K,D_K\}$

در این رابطه D_0 نشان‌دهنده محاسبه $D_{l0,l'0}$ است. یعنی محاسبه ماتریس D در حالتی که مرتبه آن صفر است. به‌منظور محاسبه رابطه (۸) و رابطه (۳) خواهیم داشت[۵]:

حال می‌توان با استفاده از بردارهای ویژه به‌دست‌آمده، توابع پایه اسلپین را در منطقه مدنظر ساخت[۸]:

رابطه (۱۳) $S_{jm}=V_{jm}^T Y_{;m}$

همچنین به روش مشابه می‌توان ضرایب این توابع پایه جدید را محاسبه کرد[۸]:

رابطه (۱۴) $\Psi_{jm}=V_{jm}^{-1}\psi_{;m}$

[1] 3j-Wigner

[Downloaded from jgit.kntu.ac.ir on 2026-11-16]

[DOI: 10.29252/jgit.5.1.39]

۲-۲- مدل اسلپین از مشاهدات مستقیم

در این بخش بایستی ضرایب متناسب با هر یک از توابع پایه به‌دست‌آمده از رابطه (۱۳) با استفاده از مشاهدات برآورد شود. به‌عبارت‌دیگر بایستی مدل مشاهده را ساخته و ضرایب مجهول را به‌دست آوریم. از آنجایی که مشاهدات در این تحقیق بر اساس مشاهدات دو فرکانسه GPS استخراج شده، در گام نخست بایستی مشاهدات را از فایل‌های خام مشاهداتی فراخوانی و به‌صورت زیر برای ورود در معادلات مشاهدات آماده شوند[۱۱]:

$$STEC_P = \frac{f_1^2(P_1 - P_2 - B_i - B^P)}{40.3(\frac{f_1^2}{f_2^2} - 1)}$$

رابطه (۱۵)

رابطه (۱۶)

$$STEC_L = \frac{f_1^2(\lambda_1 L_1 - \lambda_2 L_2 - \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 - b_i - b^P)}{40.3(\frac{f_1^2}{f_2^2} - 1)}$$

در اینجا P_1 و P_2 مشاهدات کد، L_1 و L_2 مشاهدات فاز حامل، λ_1 و λ_2 به ترتیب طول موج مربوط به فرکانس‌های f_1=1575.42MHz و f_2=1127.60MHz و همچنین b_r و b^s بایاس‌های دستگاهی گیرنده و ماهواره در مشاهدات فاز حامل، B_r و B^s بایاس‌های دستگاهی گیرنده و ماهواره در مشاهدات کد و در آخر $STEC_L$ و $STEC_P$ محتوای الکترونی کل مسیر سیر سیگنال می‌باشند. ازآنجایی‌که در رابطه (۱۶) اعداد ابهام فاز هر دو طول موج، N_1 و N_2 مشخص نیستند به تبع آن مقدار حاصل از رابطه (۱۶) بایاس داشته و قابل اعتماد نخواهد بود. به همین دلیل از این رابطه برای نرم کردن مقادیر حاصل از رابطه (۱۵) استفاده می‌شود. به‌منظور نرم‌سازی ابتدا بایستی اختلاف بین دو مقدار روابط (۱۵) و (۱۶) در هر اپک محاسبه‌شده، سپس بروی یک بازه زمانی کوتاه (به‌عنوان مثال نیم‌ساعته) از این اختلاف میانگین‌گیری کرده و در آخر مقدار حاصل را به مقادیر رابطه (۱۶) اضافه می‌کنیم. در ادامه روابط محاسبات فوق آمده است[۱۲].

$$\Delta STEC_i = STEC_{P,i} - STEC_{L,i}$$

رابطه (۱۷)

$$\Delta STEC_M = \frac{\sum_{i=1}^{M} \Delta STEC_i}{M}$$

رابطه (۱۸)

$$STEC_{smooth} = STEC_L + \Delta STEC_M$$

رابطه (۱۹)

پس از آماده شدن مقادیر مشاهدات بایستی آن‌ها در راستای عمود بر کره واحد (که قرار است مشاهدات بر روی آن تصویر شوند.) تصویر شوند که برای این منظور از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$VTEC = \cos(z) \times STEC_{smooth}$$

رابطه (۲۰)

در اینجا z زاویه ارتفاعی بین امتداد عمود در نقطه نفوذ در لایه یونسفر بر روی کره واحد تا امتداد ماهواره و گیرنده است. پس از مهیا کردن مشاهدات بایستی آن‌ها را در مدل مشاهده زیر گذاشته و به روش کمترین مربعات حل کنیم:

$$L=AX$$

رابطه (۲۱)

در اینجا L ماتریس مشاهدات VTEC، X ماتریس ضرایب مجهول توابع اسلپین کروی و A ماتریس ساختار می‌باشند. لازم به ذکر است که بایستی در سرشکنی به روش کمترین مربعات، ماتریس وزن مشاهدات نیز وارد شود. این ماتریس از اعمال قانون انتشار خطاها بر روی روابط ۱۵ تا ۲۰ به‌دست می‌آید.

۲-۳- تلفیق طیفی اسلپین کروی

در این قسمت بایستی دو مدل غیر مستقیم و مستقیم حاصل از روابط فوق تلفیق شوند. نکته حائز اهمیت در این تلفیق طیفی، مشابه بودن توابع پایه این دو دسته است. به‌منظور تلفیق طیفی این دو دسته مدل ضرایب نظیر به نظیر مدل‌ها به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

[Downloaded from jgit.kntu.ac.ir on 2026-11-16]

[DOI: 10.29252/jgit.5.1.39]

رابطه (۲۲)

$$\overline{VTEC}(\theta,\lambda)=\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\Psi_j^1+\beta_j\Psi_j^2\right)S_j(\theta,\lambda)$$

در اینجا Ψ_j^1 ضرایب اسلپین کروی مدل غیر مستقیم، Ψ_j^2 ضرایب اسلپین کروی مدل مستقیم می‌باشند. n تعداد توابع پایه اسلپین کروی استفاده‌شده و $S_j(\theta,\lambda)$ توابع اسلپین کروی است. α_j و β_j ضرایب مربوط به ترکیب طیفی هستند که به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

رابطه (۲۳)

$$\alpha_j=\frac{\sigma_{j,1}^2}{\sigma_{j,1}^2+\sigma_{j,2}^2}\quad,\quad \beta_j=\frac{\sigma_{j,2}^2}{\sigma_{j,1}^2+\sigma_{j,2}^2}$$

در اینجا $\sigma_{j,1}^2$ و $\sigma_{j,2}^2$ به ترتیب واریانس ضرایب مدل غیرمستقیم و مستقیم هستند. واریانس ضرایب مدل غیرمستقیم از اعمال قانون انتشار خطاها بر روی دقت ضرایب هارمونیک کروی به‌دست خواهد آمد. واریانس ضرایب مدل مستقیم نیز از ماتریس واریانس کوواریانس سرشکنی کمترین مربعات مربوطه، قابل حصول است.

۳- پیاده‌سازی

به‌منظور پیاده‌سازی روش‌های ذکر شده در این تحقیق بایستی ابتدا منطقه مطالعاتی و بیشینه درجه و مرتبه هارمونیک‌های کروی مدنظر را تعیین کرد. بیشینه درجه و مرتبه مطابق با محصولات یونسفری سرویس بین المللی سامانه‌های تعیین موقعیت ماهواره‌ای[1] برابر با ۱۵ در نظر گرفته‌شده‌است. محدوده جغرافیایی مطالعاتی نیز محدوده قطب شمال فرض شده‌است؛ که تقریبا عرض‌های جغرافیایی بالاتر از ۶۰ درجه را به‌صورت کلاهک کروی پوشش می‌دهد. بر اساس این منطقه و تعداد هارمونیک‌های کروی توابع پایه اسلپین کروی با رابطه (۱۳) ساخته می‌شوند. در ادامه ضرایب هارمونیک کروی با قدرت تفکیک ۱ ساعته برای روز اول دسامبر ۲۰۱۵، از وب سرویس CODE[2] دانلود شده است[۱۳]. سپس از ضرایب هارمونیک کروی موجود استفاده کرده و با کمک رابطه (۱۴) ضرایب نظیر توابع اسلپین کروی ساخته می‌شوند. البته لازم به ذکر است که دقت این ضرایب اسلپین کروی با استفاده از قانون انتشار خطاها بایستی محاسبه شود. این دقت‌ها در قسمت ترکیب طیفی به کار می‌رود.

از آنجایی که این تحقیق به دنبال بررسی تلفیق طیفی اسلپین کروی دو مدل مختلف بوده است، مشاهدات ایستگاه‌های شبکه‌های منطقه‌ای شمال اروپا [۱۴] و بخش شمالی کانادا [۱۵] در روز یاد شده برای مدل‌سازی مستقیم مورد استفاده قرار گرفته است. در شکل (۱) موقعیت جغرافیایی این ایستگاه‌ها نشان داده‌شده است.

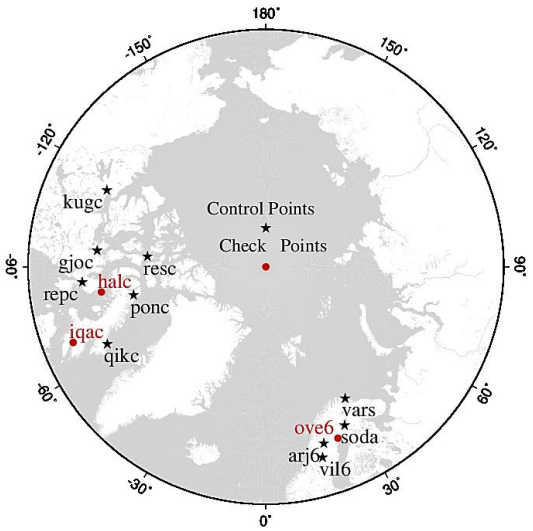
در شکل (۱) دو دسته ایستگاه مشاهداتی معرفی شده‌اند. دسته اول که به نام نقاط کنترل نشان داده‌شده‌اند و برای مدلسازی مستقیم به کار رفته‌اند. دسته دیگر (نقاط چک) ایستگاه‌هایی هستند که برای راستی آزمایی مدل‌ها و همچنین تلفیق طیفی پیشنهادی، به کار می‌رود. مورد بسیار مهم در گزینش این ایستگاه‌ها عدم حضور آن‌ها درمدلسازی مدل‌های جهانی است. شکل (۲) درک بهتری از نحوه انتخاب ایستگاه‌های کنترل و چک را به‌دست می‌دهد. در این شکل نقاط نفوذ در لایه یونسفر برای دو دسته ایستگاه آورده شده است. بر اساس این شکل می‌توان دید که مشاهدات یک ایستگاه در قسمت شمال اروپا و دو ایستگاه در شمال کانادا معیارهای نسبتا منطقی (با توجه به وضع موجود) برای ارزیابی نتایج می‌باشند.

[1] International GNSS Service (IGS)

[2] Center of Orbit Determination in Europe (CODE)

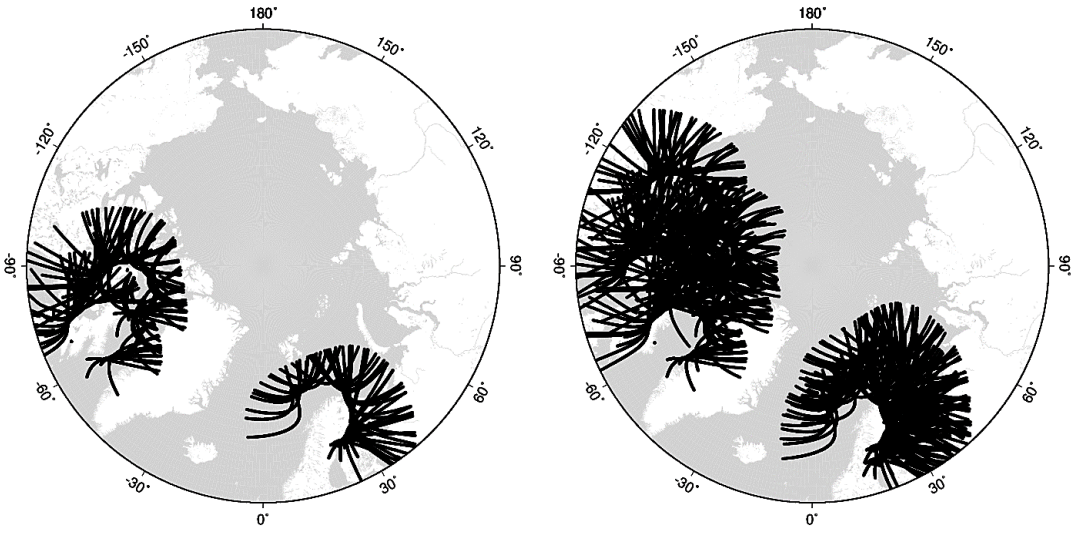
[Downloaded from jgit.kntu.ac.ir on 2026-11-16]

[DOI: 10.29252/jgit.5.1.39]



شکل ۱ : موقعیت جغرافیایی نقاط مورداستفاده در مدلسازی مستقیم

پس از فرآیند نرم‌سازی مشاهدات گیرنده‌های ۱۰ ایستگاه کنترل مذکور، تصویر در راستای قائم آن‌ها با



الف **ب**

شکل ۲ : موقعیت مکانی نقاط نفوذ یونسفری (الف: ایستگاه‌های کنترل و (ب: ایستگاه‌های چک

بدین منظور مختصات نقاط نفوذ یونسفری مشاهدات هر ۳ ایستگاه در چهار مدل وارد شد. مقدار VTEC محاسبه‌شده از آن‌ها با مقدار مشاهداتی نظیر آن نقاط نفوذ مقایسه شده و به‌صورت ریشه میانگین مربعات خطاها[1] برای هر بازه یک ساعته محاسبه‌شده است.

[1] Root Mean Square Error

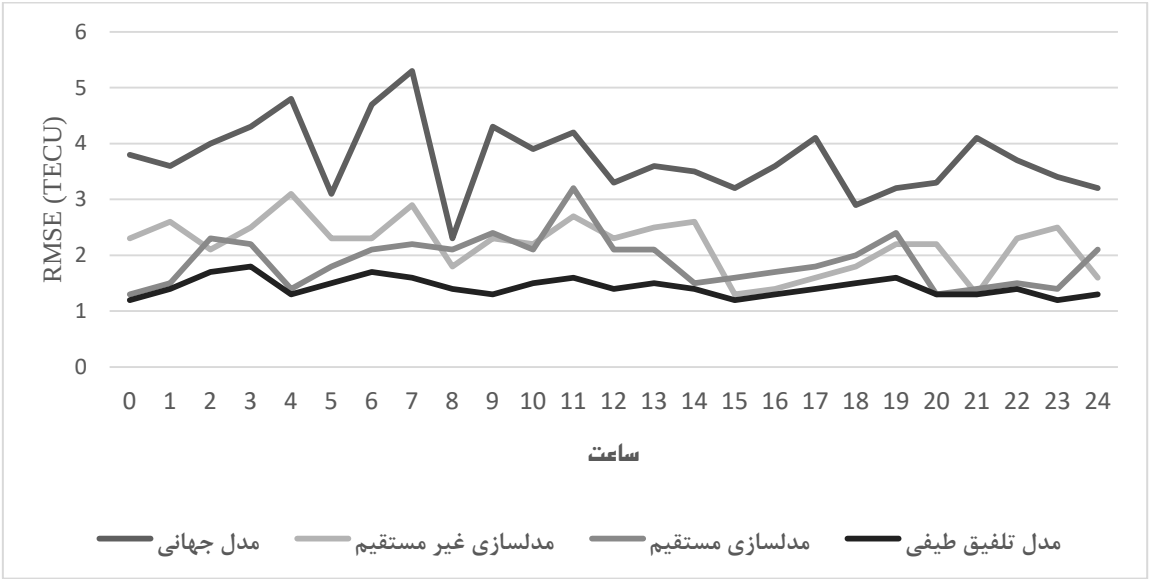
رابطه (۲۰) محاسبه‌شده و آن‌ها برای ورود به دستگاه معادلات مشاهدات آماده شوند. سپس با استفاده از تکنیک کمترین مربعات ضرایب توابع اسلپین کروی محاسبه می‌شود. دقت ضرایب محاسبه‌شده نیز یکی دیگر از خروجی‌های فرآیند کمترین مربعات است که در بخش ترکیب طیفی به کار گرفته می‌شوند.

همان‌طور که در بالا آورده شده بود، جهت درستی آزمایی مدلسازی از مشاهدات ایستگاه‌های نقاط چک استفاده شده است. این تحقیق به دنبال بررسی چگونگی تلفیق طیفی بوده است؛ به همین دلیل فرآیند درستی آزمایی بر روی مدل‌های جهانی، بهبودیافته جهانی (مدل غیرمستقیم)، مستقیم و همچنین تلفیقی انجام‌شده است.

شکل زیر مقادیر این کمیت را نشان می‌دهد.

[Downloaded from jgit.kntu.ac.ir on 2026-11-16]

[DOI: 10.29252/jgit.5.1.39]



شکل ۳ : مقادیر RMSE برای مدل‌های جهانی، غیرمستقیم، مستقیم و تلفیقی در روز اول دسامبر سال ۲۰۱۵

با توجه بالا بودن مقدار RMSE مدل جهانی در شکل فوق، می‌توان دریافت که مدل جهانی عملکرد نامناسبی در مناطق قطبی دارد. البته میزان این عدم کارایی پیش‌تر در مقاله اعتماد فرد و حسینعلی نشان داده‌شده بود[۹]. همچنین همان‌طور که در شکل (۳) دیده می‌شود در برخی ساعات عملکرد مدل غیر مستقیم از مدل مستقیم بهتر است. به‌عبارت‌دیگر بر اساس نتایج حاصل از نقاط چک، مدل غیر مستقیم خطای کمتری در مدلسازی دارد. البته در سایر موارد مدل‌سازی مستقیم درستی بیشتری دارد. به‌منظور بررسی کلی میانگین RMSE در طول این بازه زمانی گرفته شد که این کمیت به ترتیب برای مدل غیرمستقیم و مستقیم برابر با ۲/۲ و ۱/۹ TECU می‌باشد.

علاوه بر موارد فوق در شکل (۳) دیده می‌شود که میزان خطای مدل‌سازی در حالتی که تلفیق طیفی انجام می‌شود تقریبا از دو مدل فوق‌الذکر کمتر است. نکته دیگر که در شکل دیده می‌شود خطای نسبتا یکسان مدلسازی در کل بازه زمانی مطالعاتی است. میزان میانگین RMSE در کل بازه مطالعاتی عددی برابر با ۱/۴ TECU است. این امر نشان‌دهنده کارایی تلفیق طیفی در مورد مطالعاتی این تحقیق است.

یکی از دلایل کمتر شدن خطا در مدل تلفیق طیفی، تلفیق اثرات طول موج‌های بلند و کوتاه یونوسفری موجود در مدل‌های غیرمستقیم و مستقیم است. دلیل دیگر به ویژگی منحصربه‌فرد منطقه مطالعاتی در این تحقیق مربوط است. در منطقه مطالعاتی قطب شمال (عرض جغرافیایی ۶۰ تا ۹۰)، در بخشی از این کلاهک که رو به خورشید است علی‌القاعده روز و در بخش دیگر شب است. این نکته خود به پیچیدگی مدلسازی در این منطقه می‌افزاید. مدل غیر مستقیم که از مدل جهانی استخراج می‌شود، توزیع نسبتا مناسبی از نقاط را در بخش شب و روز کره زمین در مدلسازی به کار می‌گیرد. ولی نقطه‌ضعف مدل‌های جهانی تعداد بسیار کم ایستگاه GNSS در قطب شمال است. بنابراین دقت مدلسازی در این مناطق متاثر از تعداد کم ایستگاه‌ها است. حال آن‌که در مدلسازی مستقیم تعداد ایستگاه‌ها در منطقه مطالعاتی مناسب است؛ ولی در ساعاتی از شبانه‌روز که همه نقاط در روز یا در بخش شب قرار می‌گیرند، مدل دقت و کیفیت ساعات دیگر خود را ندارد. به‌عبارت‌دیگر در مدلسازی مستقیم توزیع نامناسب ایستگاه‌ها دقت مدلسازی را متاثر می‌کند. با توجه به این نکات، با تلفیق طیفی می‌توان اثرات تعداد

[Downloaded from jgit.kntu.ac.ir on 2026-11-16]
[DOI: 10.29252/jgit.5.1.39]

کم ایستگاه‌ها در مدلسازی غیر مستقیم و توزیع نامناسب ایستگاه‌ها در مدلسازی مستقیم را کم کرد. بنابراین خطای روش تلفیقی به‌صورت کلی کمتر از دو روش دیگر است.

۴- نتایج و پیشنهاد

این تحقیق برای اولین بار چالش ترکیب مدل‌های منطقه‌ای و جهانی را مورد بررسی قرار داد. به این منظور مدل‌های جهانی یونسفری را که بر مبنای توابع پایه هارمونیک هستند با مدل منطقه‌ای با توابع پایه اسلپین کروی در منطقه کلاهک کروی قطب شمال تلفیق طیفی انجام شد. بر اساس مقایسه مدل‌های جهانی، مدلسازی غیرمستقیم و مستقیم در منطقه مطالعاتی، مشخص شد که مدل‌های جهانی کارکرد مناسبی ندارند. علاوه بر این، دیده شد که هیچ‌کدام از دو مدل مستقیم و غیر مستقیم برتری مطلقی در کل بازه زمانی مدنظر ندارند. میانگین RMSE مدل‌های مستقیم و غیر مستقیم برای کل بازه زمانی به ترتیب مقادیر ۱/۹ و ۲/۲ TECU به‌دست‌آمده‌اند. در آخر نتایج تلفیق طیفی مدل‌های مستقیم و غیرمستقیم نشان از صحت بیشتر مدلسازی داشت. به‌طوری RMSE حاصل از این تلفیق طیفی برابر با ۱/۴ TECU محاسبه‌شده است.

با تلفیق طیفی می‌توان اثرات تعداد کم ایستگاه‌ها در مدلسازی غیر مستقیم و توزیع نامناسب ایستگاه‌ها در مدلسازی مستقیم را کم کرد. بنابراین خطای روش تلفیقی به‌صورت کلی کمتر از دو روش دیگر است.

همان‌طور که در بالا آورده شده بود، این تحقیق تنها به دنبال بررسی چگونگی امکان تلفیق طیفی دو مدل منطقه‌ای و جهانی بر روی مورد مطالعاتی خاصی بوده است. به‌منظور بررسی عمیق‌تر در تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود که از توزیع ایستگاه‌های بیشتری در مناطق مطالعاتی استفاده شود. همچنین بازه زمانی بلندتری مورد مطالعه قرار بگیرد؛ چرا که امکان حضور تمامی پدیده‌های یونسفری در آن دیده شود.

مراجع

[1] D. Slepian, and H. O. Pollak, “Prolate Spheroidal Wave functions Fourier Analysis and Uncertainty I.”, Bell Sys. Tech. J. 40, 1, 43–63, 1961.

[2] D. Slepian, and E. Sonnenblick, “Eigenvalues associated with prolate spheroidal wave functions of zero order”, Bell Syst. Tech. J., 44, pp. 1745–1759, 1965.

[3] D. Slepian, “On Bandwidth.”, Proceedings of the IEEE 64, 3, 1976.

[4] D. Slepian, “Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty V: The Discrete Case”, Bell Syst. Tech. J. 57, 2, 1371–1430, 1978.

[5] F. J. Simons, F. A. Dahlen, and M. A. Wieczorek, “Spatiospectral Concentration on a Sphere”, SIAM Review 48, 3 (January), 504–536, 2006.

[6] F. J. Simons, J. C. Hawthorne, and C. D. Beggan, “Efficient analysis and representation of geophysical processes using localized spherical basis functions”, In Wavelets XIII, V. K. Goyal, M. Papadakis, and D. Van De Ville, Eds. Vol. 7446. SPIE, San Diego, CA, USA, 74460G15, 2009.

[7] F. J. Simons, “Slepian functions and their use in signal estimation and spectral analysis”, Handbook of Geomathematics, Eds. Thomas Sonar, Zuhair M. Nashed, and Willi Freeden. Heidelberg, Germany: Springer, 891-923, 2010.

[8] H. Etemadfard, M. M. Hossainali, “Spherical Slepian as a New Method for Ionospheric Modeling in Arctic Region”, Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, under review, 2016.

[9] H. Etemadfard, M. M. Hossainali,

[Downloaded from jgit.kntu.ac.ir on 2026-11-16]

[DOI: 10.29252/jgit.5.1.39]

"Application of Slepian Theory for Improving the Accuracy of Global Ionosphere Models in the Arctic Region", J. Geophys. Res. Space Physics, 120, 2015.

[10] D. L. Donoho, P. B. Stark, "Uncertainty principles and signal recovery", SIAM J. Appl. Math., 49, pp. 906–931, 1989.

[11] X. Liao, "Carrier Phase Based Ionosphere Recovery over a Regional Area GPS Network", UCGE Reports, Number 20143, The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, 2000.

[12] X. Liao, Y. Gao, "High-Precision ionosphere TEC Recovery Using a Regional Area GPS Network", Navigation, Vol. 48, No. 2, 101-111, 2001.

[13] Website: ftp://ftp.unibe.ch/aiub/CODE/2015/

[14] Website: http://www.epncb.oma.be/_networkdata/stationlist.php

[15] Website: http://chain.physics.unb.ca/chain/pages/stations/

[Downloaded from jgit.kntu.ac.ir on 2026-11-16]

[DOI: 10.29252/jgit.5.1.39]

K. N. TOOSI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF GEODESY AND GEOMATICS ENGINEERING

Journal of Geospatial Information Technology
Vol.5, No.1, Spring 2017

Introduction of Spherical Slepian Spectral Combination and Its Investigation on Global and Regional Ionospheric Models

Hosein Etemadfard *[1], Masoud Mashhadi Hossainali [2]

1- PhD. Student, Faculty of Geodesy and Geomatics Engineering, K. N. Toosi University of Technology.
2- Associate Professor in Geodesy, Faculty of Geodesy and Geomatics Engineering, K. N. Toosi University of Technology.

Abstract

Lack of interaction and ability to combine between ionosphere models are important problems among them. This study has investigated the interaction between global and regional ionospheric models which are according to the base mathematical functions. Here, spherical Slepian base functions have been suggested for spectral combination. They can be defined in global and regional scales. Two sets of coefficient were assumed for spherical Slepian base function. One set (direct model) is extracted from the direct observation of GPS stations. Another set (indirect model) is derived from spherical harmonic products of Global Ionosphere Models (GIMs). GIM's efficiency has been modified on a sub-space which was equal to pervious set.

Maximum degree has considered equal to 15 for implementation of spherical Slepian spectral combination theory. Also, the Arctic region has been taken as study area where it is the spherical cap by latitude upper than 60 degrees. Observations of three GPS stations are used for evaluation of models. They have not contributed for direct and indirect modelling. Root Mean Square of Errors (RMSEs) for GIMs, direct, indirect and combining models are equal to 3.7, 2.2, 1.9, 1.4 TECU, respectively. In other words, results show that combining method has improved the ionospheric modelling here. The combining method can decrease the effects of the lack of stations in the indirect model and the inappropriate distribution of stations in the direct one. Therefore, the RMSE of the combining model is less than other models in the Arctic region.

Key words: Spectral Combination, Spherical Slepian, Ionosphere

Correspondence Address No. 1346, ValiAsr Street, Mirdamad cross, Geomatics Engineering Faculty, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran
Tel +98 21 88786212.
Email: hossein_etemadfard@yahoo.com

[Downloaded from jgit.kntu.ac.ir on 2026-11-16]

[DOI: 10.29252/jgit.5.1.39]