

این مقاله در دومین کنفرانس ملی مهندسی فناوری اطلاعات مکانی به عنوان مقاله برگزیده انتخاب شده است که پس از تکمیل، داوری مجدد و اخذ پذیرش در این شماره از نشریه به چاپ می‌رسد.

## اثر توپوگرافی در تعیین ژئوپیویت با استفاده از مدل‌های ژئوپتانسیل

سهیل هجرتی<sup>۱\*</sup>، مهدی گلی<sup>۲</sup>

۱- دانش آموخته کارشناس ارشد ژئودزی، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم تحقیقات شهرورد  
۲- استادیار ژئودزی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شهرورد

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۸/۰۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۱۱/۱۱

### چکیده

وجود توپوگرافی در بالای ژئوپیویت مانع اصلی برای تعیین ارتفاع ژئوپیویت با استفاده از مدل‌های ژئوپتانسیل جهانی امکان مدل‌سازی میدان پتانسیل زمین را به صورت بسط سری خارجی از هارمونیک‌های کروی فراهم می‌سازند. استفاده از این بسط برای تعیین آنومالی پتانسیل بروی ژئوپیویت در داخل توپوگرافی سبب تولید یک بایاس می‌شود که به آن بایاس توپوگرافی می‌گویند. این مطالعه به محاسبه ژئوپیویت با استفاده از مدل‌های ژئوپتانسیل می‌پردازد. برای این منظور دو روش مستقیم انتقال تحلیلی و غیر مستقیم رَب به کار گرفته می‌شود. روش انتقال تحلیلی بر مبنای ارتفاع ژئوپتانسیل در داخل توپوگرافی و اعمال بایاس توپوگرافی و روش رَب بر مبنای محاسبه آنومالی ارتفاعی و تبدیل آن به ژئوپیویت است. موفقیت این دو روش برای بازیابی ژئوپیویت در ۴۹۰ نقطه ترازیابی با جی‌پی‌اس در منطقه کوهستانی کلرادو در امریکا مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج نشان دهنده توافق خوب دو روش در حد سانتیمتر در قیاس با نقاط ترازیابی با جی‌پی‌اس است. همین طور نشان از بهبود دقت نسبی و مطلق ژئوپیویت حاصل از مدل ای‌جی‌ام ۰.۸ به میزان ۶۰٪ در هر دو روش می‌باشد. نتایج عددی نشان داد که استفاده از مدل‌های هارمونیک ارتفاعی بجای ارتفاع نقطه می‌تواند باعث ایجاد بایاس چند سانتیمتری روی ارتفاع ژئوپیویت شود. علاوه بر این دقت مطلق روش رَب از روش انتقال تحلیلی در تعیین ژئوپیویت در قیاس با نقاط ترازیابی با جی‌پی‌اس بالاتر است.

کلیدواژه‌ها: انتقال تحلیلی، بایاس توپوگرافی، ژئوپیویت، مدل ژئوپتانسیل.

\*نویسنده مکاتبه کننده: تهران- سعادت آباد- شهرک مخابرات- خیابان پیوند- کوچه ۱۴- پلاک ۱۴- واحد سوم شرقی- کد پستی: ۱۹۸۱۹۳۳۴۷۷  
تلفن: ۰۹۱۲۸۱۵۶۹۹- ۰۲۱۲۲۱۳۶۸۸۲

Email : hejrati.soheyl@gmail.com ; hejrati@iau-shahrood.ac.ir

## ۱- مقدمه

(۱۹۹۷) و استفاده از توسعه انتگرال عددی به سری دو جمله‌ای (تا توان سوم توپوگرافی) را روی داده‌های ترازیابی با<sup>۳</sup> GPS منطقه ایران مقایسه کرد[۹]. اگر ن (۲۰۰۴) خطا انتقال تحلیلی را بروی ژئویید تا توان چهارم از ارتفاع توپوگرافی محاسبه کرد. براساس مطالعه او بیشینه مقدار این خطا برای بسط فوق تا درجه/مرتبه ۱۸۰ در رشتۀ کوههای هیمالیا ۴.۷ متر بود[۱]. شوبرگ (۲۰۰۷) نشان داد که بایاس توپوگرافی تنها تابع تغییرات دانسیته در راستا شعاعی ژئوسنتریک آن نقطه است. به عقیده او این بایاس از یک رابطه ساده شامل توانهای دوم و سوم ارتفاع توپوگرافی محاسبه می‌شود[۱۳]. در حالیکه ورمیر (۲۰۰۷) نشان داد بایاس توپوگرافی برای زمین واقعی پیچیده‌تر از فرم پیشنهادی شوبرگ (۲۰۰۷) است[۱۸]. شوبرگ (۲۰۰۹) نشان داد که اثر ناهمواری توپوگرافی نسبت به پوسته کروی بوگه تاثیری در تعیین ژئویید ندارد[۱۴]. شوبرگ و باقربنده (۲۰۱۱) با استفاده از مدل EGM08 خطا انتقال تحلیلی را برای رشتۀ کوههای هیمالیا مقدار ۵/۳ متر-۰/۰۸ تا ۰/۰۸ متر برآورد کردند[۱۵]. شوبرگ (۲۰۱۵) نشان داد که بایاس توپوگرافی حاصل از تکنیک انتقال تحلیلی برای تعیین ژئویید در داخل توپوگرافی با GGMs و انتگرال استوکس نتایج یکسانی ندارد[۱۶].

هدف از این تحقیق محاسبه اثر توپوگرافی به دو روش مستقیم انتقال تحلیلی و غیرمستقیم رَپ در تعیین ارتفاع ژئویید با GGMs می‌باشد.

- این مطالعه سعی دارد به سوالات زیر پاسخ دهد.
  - توپوگرافی و تا چه درجه هارمونیک کافی است؟
  - کدامیک از روش‌های فوق در مقایسه با نقاط ترازیابی با GPS دقیق‌تر را فراهم می‌کند؟
  - استفاده از ارتفاع نقاط بجای مدل هارمونیک ارتفاعی چه تاثیری بر نتایج دارد؟

<sup>3</sup> Global Positioning System

مدل‌های ژئوپتانسیل جهانی<sup>۱</sup> (GGMs) قادر به مدلسازی دقیق طول موج‌های بلند و متوسط میدان پتانسیل زمین هستند. این مدل‌ها پتانسیل جاذبی زمین را در قالب سری هارمونیک از ضرایب نرمالیز کروی تا درجه/مرتبه محدود ارائه می‌دهند. تعیین ژئویید برای قسمت‌هایی از ژئویید که در قاره‌ها و داخل توپوگرافی نهفته است، نیاز به تعیین آنومالی پتانسیل در داخل توپوگرافی دارد. این در حالی است که GGMs تنها برای مناطق بیرون از توپوگرافی زمین آنومالی پتانسیل را در اختیار قرار می‌دهند. از نظر تئوری در داخل توپوگرافی سری هارمونیک‌های کروی واگرا هستند[۱۱]. بدیهی است که در درجه و مرتبه محدود واگرایی اتفاق نمی‌افتد، اما باعث فاصله گرفتن از مقادیر صحیح می‌شود که آنرا بایاس توپوگرافی یا خطا انتقال تحلیلی<sup>۲</sup> می‌نامند [۴].

بایاس توپوگرافی توسط شوبرگ (۱۹۷۷) معرفی شد[۱۱]. جکلی (۱۹۸۱) و (۱۹۸۲) نشان داد که مقدار خطا انتقال تحلیلی در سطح زمین برای محاسبه آنومالی ارتفاعی (یا ارتفاع ژئویید) با استفاده از بسط سری خارجی آنومالی پتانسیل تا درجه/مرتبه ۳۰۰، نزدیک به ۰.۵ میلی متر است[۴ و ۵]. ونیچک و همکاران (۱۹۹۵) با استفاده از فشرده‌سازی دوم هلمرت، طول موج‌های بلند ژئویید را در فضای هلمرت محاسبه کردند. آنها برای این‌منظور از مدل هارمونیک توپوگرافی تا ترم دوم آن استفاده کردند[۱۷]. مارتینک و ونیچک (۱۹۹۶) اثر بایاس توپوگرافی را برای یک مدل ایزوستاسی اختیاری محاسبه کردند[۶]. رَپ (۱۹۹۷) ارتفاع ژئویید را از آنومالی ارتفاعی محاسبه کرد[۱۰]. نهانندچی و شوبرگ (۱۹۹۸) اثرات بایاس توپوگرافی را تا توان سوم توپوگرافی محاسبه کردند[۸]. نهانندچی (۲۰۰۲) روش رَپ

<sup>1</sup>Global Geopotential Models

<sup>2</sup>Analytical Continuation Error

معادل اختلاف ضرایب هارمونیک بسط داخلی و خارجی توبوگرافی است. ضرایب هارمونیک  $T_{nm}^e$  از کم کردن ضرایب هارمونیک میدان ثقل نرمال از ضرایب ژئوتانسیل ماهواره‌ای به دست می‌آید. همچنین ضرایب بایاس توبوگرافی را می‌توان به صورت ترکیب خطی از ضرایب هارمونیک توان‌های توبوگرافی نوشت [۷].

$$\delta V_{nm}^{ei} = -2\pi G\rho \left[ H_{nm}^2 + \frac{2}{3R} H_{nm}^3 + \frac{n(n+1)}{12R^2} H_{nm}^4 + \dots \right] \quad (۱)$$

که  $(\theta, \lambda) = (\theta, \lambda)$  و  $\lambda$  به ترتیب متمم عرض و طول کروی هستند. با استفاده از روابط (۱) و (۲) ارتفاع ژئوپید از طریق بسط هارمونیک‌های کروی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$N(\Omega) = \frac{GM}{a\gamma_e} \sum_{n=0}^{nmax} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=-n}^n [T_{nm}^e + \delta V_{nm}^{ei}] Y_{nm}(\Omega) - \frac{U(r_g, \Omega)}{\gamma_e} \quad (۳)$$

توبوگرافی است. امروزه بدليل محدودیت در وجود داده‌های گرانی، بیشترین درجه GGMs ۲۱۶۰ است. در حالی که با توجه به وجود داده‌های رقومی ارتفاعی مانند etopo1، مدل‌های هارمونیک ارتفاعی تا درجات بالاتر نظری ۱۰۸۰۰ فراهم شده است [۲]. در صورتی که درجه استفاده شده در مدل هارمونیک توان‌های توبوگرافی بیشتر از درجه GGMs باشد، در رابطه (۴) اثر بایاس توبوگرافی باید از بسط جدگانه محاسبه شود. صرف نظر از توان‌های مرتبه چهارم وقتی  $nmax \rightarrow \infty$ ، اثر بایاس توبوگرافی طبق رابطه (۴) به رابطه خلاصه شده زیر تبدیل می‌شود.

$$\delta V(\Omega) = -2\pi G\rho \left[ H^2(\Omega) + \frac{2}{3R} H^3(\Omega) \right] \quad (۵)$$

در این رابطه،  $H$  ارتفاع ارتومنتریک نقطه است.

-۲- اثر بایاس توبوگرافی در روش انتقال تحلیلی مارتینک (۱۹۹۸) نشان داد که ضرایب هارمونیک آنومالی پتانسیل روی ژئوپید از رابطه (۱) به دست می‌آید [۷].

$$T_{nm} = T_{nm}^e + \delta V_{nm}^{ei} \quad (۱)$$

در این رابطه  $T_{nm}$  ضرایب هارمونیک آنومالی پتانسیل روی ژئوپید،  $T_{nm}^e$  ضرایب هارمونیک بسط خارجی آنومالی پتانسیل روی ژئوپید و  $\delta V_{nm}^{ei}$  بایاس توبوگرافی،

$$\text{رابطه (۲)}$$

در رابطه فوق،  $G$  ثابت جاذبی نیوتن،  $\rho$  دانسیته توبوگرافی و  $R$  شاعع متوسط ژئوپید است. ضرایب هارمونیک  $N$ ام توان توبوگرافی است که از رابطه (۳) زیر به دست می‌آید.

$$H_{nm}^i = \frac{1}{4\pi(2n+1)} \iint_{\sigma} H^i Y_{nm}(\Omega) d\Omega \quad (۳)$$

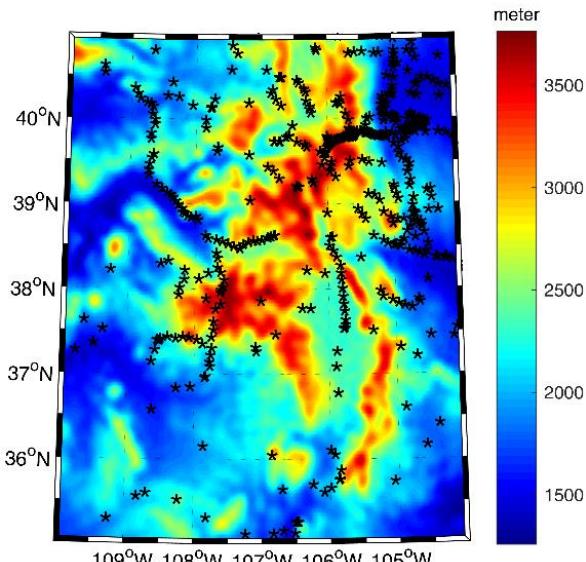
$$\text{رابطه (۴)}$$

در رابطه فوق،  $GM$  ضریب ثابت حاصلضرب جرم زمین در ثابت جاذبی نیوتن و  $a$  مقیاس GGMs است. این ضرایب ممکن است با مقادیر متناظر در میدان ثقل نرمال که در محاسبه ترم  $U(r_g, \Omega)$  به کار می‌رود، متفاوت باشد. در رابطه فوق  $r_g$  شاعع ژئوسنتریک ژئوپید و  $\gamma_e$  شتاب ثقل نرمال روی بیضوی است. بدیهی است که  $r_g$  در اختیار نیست. با توجه به مجھول بودن این کمیت می‌توان از شاعع ژئوسنتریک بیضوی به جای آن استفاده کرد.

اختلاف رابطه (۳) با بسط هارمونیک مرسوم استاندارد برای تعیین ژئوپید، وجود ترم  $\delta V_{nm}^{ei}$  است. مطالعات نهان‌نگاری (۲۰۰۲) و آگرن (۲۰۰۴) نشان داده است که هارمونیک‌های توان‌های بالاتر از چهارم وجود ندارد [۹ و ۱]. برخی محققین از ترم‌های مرتبه دوم [۱۷] و برخی تا ترم‌های مرتبه سوم [۱۳] سود برداشتند. نکته مهم دیگر، درجه هارمونیک توان‌های

#### ۴- محاسبات عددی

منطقه تست در کشور امریکا منطقه کوهستانی کلرادو محدود به عرض جغرافیایی ۳۵ تا ۴۱ درجه شمالی و طول جغرافیایی ۱۰۴ تا ۱۱۰ درجه غربی انتخاب گردید. در این منطقه ۴۹۰ ایستگاه ترازیابی با GPS وجود دارد که برای آزمون بین دو روش مستقیم انتقال تحلیلی و غیر مستقیم رپ استفاده می‌شود. شکل (۱) وضعیت توپوگرافی منطقه تست را با استفاده از مدل هارمونیک تا درجه/مرتبه ۲۱۶۰ به همراه توزیع نقاط ترازیابی با GPS نشان می‌دهد. در این مطالعه از مدل ژئوپتانسیل EGM08 با درجه/مرتبه ۲۱۹۰ و مدل‌های ارتفاعی تا درجه/مرتبه ۲۱۶۰ و تا توان چهارم استفاده شد. مدل‌های ارتفاعی هارمونیک از بسط مدل ارتفاعی جهانی etopo5 به سری هارمونیک‌های ۵ کروی محاسبه گردید. رزولوشن این مدل ارتفاعی ۵ دقیقه کمانی است که با استفاده از قضیه نمونه برداری روی کره امکان بازتولید درجات هارمونیک ۲۱۶۰ را مهیا می‌سازد. البته تنها هارمونیک ۲۱۶۰/۲۱۶۰ را قابل محاسبه نخواهد بود.



شکل ۱: توپوگرافی منطقه تست و نقاط ترازیابی با GPS موجود در آن منطقه

به منظور بررسی دقیق و کارایی دو روش ارائه شده، ارتفاع ژئوپتانسیل این دو روش با ژئوپتانسیل هندسی حاصل از

#### ۳- روش رپ

روش رپ (۱۹۹۷) برای تعیین ژئوپتانسیل، محاسبه آنومالی ارتفاعی و تبدیل آن به ژئوپتانسیل با اعمال تصحیح جدایی ژئوپتانسیل از کوازی-ژئوپتانسیل می‌باشد [۳ و ۱۲].

$$N_P(\Omega) = \zeta_P(r, \Omega) + \delta_{N-\zeta}(\Omega) \quad (6)$$

که در این رابطه  $\zeta_{N-\zeta}$  تصحیح جدایی ژئوپتانسیل از کوازی-ژئوپتانسیل است. مقدار این تصحیح در تقریب اول و صرفنظر از ناهمواری‌های توپوگرافی برابر است با رابطه (۷)،

$$\delta_{N-\zeta} = \frac{\Delta g^{SB}}{\bar{\gamma}} H = \frac{\Delta g^{SB}}{\gamma_e} H \quad (7)$$

که در این رابطه،  $\Delta g^{SB}$  آنومالی ساده بوگه و  $\bar{\gamma}$  شتاب جاذبی متوسط نرمال است. تاثیر جایگزین کردن مقدار متوسط با شتاب روی بیضوی در  $\zeta_{N-\zeta}$  ناچیز است. در رابطه فوق آنومالی جاذبی ساده بوگه از رابطه (۸) محاسبه می‌شود.

$$\Delta g^{SB} = \Delta g^{FA} - 2\pi G\rho H \quad (8)$$

با بسط این رابطه در فضا فرانس داریم:

$$\text{رابطه (۹)}$$

$$\Delta g_{nm}^{SB} = \Delta g_{nm}^{FA} - 2\pi G\rho H_{nm} = \frac{(n-1)}{R} T_{nm} - 2\pi G\rho H_{nm}$$

بر طبق رابطه (۶)، تعیین ژئوپتانسیل به روش رپ نیاز به محاسبه کمیت‌های روی زمین دارد. با توجه به تغییرات ارتفاع حتی با وجود ثابت بودن عرض جغرافیایی در روند محاسبات روی گردید، مقدار متنم عرض ژئو سنتریک  $\theta$  بطور مداوم تغییر می‌کند. این به مفهوم محاسبه توابع وابسته لزاندر برای همه نقاط گردید و زمانبر شدن محاسبات است. از این رو رپ (۱۹۹۷) به منظور سرعت بخشیدن به محاسبات، رابطه (۶) را به شکل زیر باز نویسی کرد [۱۰].

$$\text{رابطه (۱۰)}$$

$$N_P(\Omega) = \zeta_0(r_e, \Omega) + \frac{\partial \zeta}{\partial r} H + \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} H + \delta_{N-\zeta}$$

در رابطه فوق،  $(\zeta_0(r_e, \Omega))$  آنومالی ارتفاعی  $\zeta$  روی بیضوی و ترم‌های دوم و سوم مشتق این کمیت نسبت به ارتفاع هستند.

می‌دانیم که ارتفاع حاصل از مدل هارمونیک، فرکانس‌های بالای ۲۱۶۰ را ندارد، لذا انتظار داریم که دقت این رابطه از رابطه (۲) بیشتر باشد. اگرچه که دقت نسبی دو رابطه نزدیک بهم است اما دقت مطلق نتایج حاصل از رابطه (۵) حدود ۵ سانتیمتر بهتر از رابطه (۲) است.

در این مطالعه برای محاسبه ژئویید به روش رَب از رابطه (۱۰) استفاده نشده است! زیرا در این رابطه اثر ترم‌های غیرخطی تغییرات آنومالی ارتفاعی نسبت به ارتفاع صرف نظر شده است. به جای آن از محاسبه آنومالی ارتفاعی در سطح زمین و تبدیل آن به ژئویید با استفاده از رابطه (۶) استفاده کردیم. همین‌طور آنومالی هوای آزاد و بوگه نیز با استفاده از مدل ژئوپتانسیل EGM08 محاسبه می‌شوند. در این روش همانند روش انتقال تحلیلی، به کارگیری ارتفاع نقطه به جای ارتفاع حاصل از مدل هارمونیک، نتایج بهتری را به همراه دارد. همین طور همانند حالت قبل استفاده از مدل هارمونیک برای تعیین ارتفاع نقاط تاثیر زیادی بر دقت انتقال تحلیلی و بیشتر باعث ایجاد بایاس می‌شود.

در قیاس صورت گرفته بین دو روش، همان‌طور که انتظار می‌رفت نتایج بهم نزدیک است. بر اساس مطالعه اگرن (۲۰۰۴) دو روش انتقال تحلیلی و رَب تا توان دوم توپوگرافی هم ارز هستند. این مساله بخوبی با نتایج جدول (۱) تایید می‌شود. از نظر تئوری روش انتقال تحلیلی بعنوان روش مستقیم باید دقت بالاتری نسبت به روش رَب داشته باشد. زیرا همان‌طور که می‌دانیم ضرایب هارمونیک GGMs روی بیضوی محاسبه می‌شوند و دقت بالاتری آنجا دارند. اما دقت نسبی و مطلق روش رَب در هر دو حالت استفاده از ارتفاع نقاط و ارتفاع حاصل از مدل هارمونیک نسبت به روش انتقال تحلیلی بالاتر است. این نتایج با نتیجه مطالعه نهان‌ندچی با مدل EGM96 روی ۳۳ نقطه ترازیابی با GPS در ایران همخوانی دارد.

دادهای ترازیابی با GPS در منطقه آزمون مورد مقایسه قرار می‌گیرد. در جدول (۱) نتایج عددی کمیت‌های مختلف از جمله ارتفاع مشاهداتی و ارتفاع حاصل از مدل هارمونیک، آنومالی ارتفاعی، ارتفاع ژئویید همراه با بایاس و اثر توان‌های دوم، سوم و چهارم توپوگرافی در روش انتقال تحلیلی آورده شده است. نتایج این جدول نشان می‌دهد که توان دوم توپوگرافی بخش اعظم اثر بایاس توپوگرافی را در بر می‌گیرد. به طوری که اثر توان سوم توپوگرافی کمتر از میلیمتر و اثر توان چهارم به ندرت از یک سانتیمتر تجاوز می‌کند.

در جدول (۲) نتایج ژئویید محاسبه شده به دو روش انتقال تحلیلی و رَب با ژئویید نقاط ترازیابی با GPS مقایسه شده است. در این جدول برای هر دو روش، محاسبات یکبار برای ارتفاع ارتمتریک نقاط و بار دیگر برای ارتفاع مدل هارمونیک انجام شده است. اولین نتیجه، نزدیکی ژئویید مدل EGM08 با اعمال اثر توپوگرافی در هر دو روش به میزان ۶۰٪ به نقاط ترازیابی با GPS به‌طور نسبی و مطلق است. به عنوان نتیجه دوم و همان‌طور که انتظار می‌رود استفاده از ارتفاع خود نقاط، بهبود (کمی) در نزدیکی ژئویید با نقاط ترازیابی با GPS دارد. در روش انتقال تحلیلی اعمال اثر توان چهارم، بهبود چند میلیمتری ژئویید را فراهم می‌کند. این نتیجه نشان دهنده درستی استدلال مطالعه ورمیر (۲۰۰۷) در مقابل نظریه شوبرگ (۲۰۰۷) است. همان‌طور که در قبل اشاره شد، در حالی که شوبرگ (۲۰۰۷) معتقد است تنها توان‌های دوم و سوم توپوگرافی در بایاس انتقال تحلیلی دخیل هستند، ورمیر (۲۰۰۷) نشان داد که توان‌های بالاتر از سوم توپوگرافی نیز دارای سهم (کمی) در بایاس تحلیلی می‌باشند [۱۸]. در جدول (۲) همچنین نتایج بایاس انتقال تحلیلی محاسبه شده از رابطه (۵) آورده شده است. این رابطه از ارتفاع نقاط بجای ارتفاع حاصل از مدل هارمونیک استفاده می‌کند.

جدول ۱: پارامترهای آماری کمیت‌های مختلف. واحد متر

انحراف معیار	میانگین	بیشینه	کمینه	رابطه	کمیت
۵۰۲	۲۰۵۲	۳۶۸۷	۱۳۲۴	$H$	ارتفاع ارتمتریک نقطه
۵۹۶	۲۱۶۰	۳۷۰۵	۱۳۵۱	$\sum_n \sum_m H_{nm}$	ارتفاع هارمونیک ۲۱۶۰
۲۶۷۶	-۱۵.۸۴۱	-۱۰.۷۲۸	-۲۲.۵۲۶	$\zeta(r, \Omega) = T(r, \Omega) \gamma^{-1}$	آنومالی ارتفاعی
۲.۶۹۴	-۱۵.۸۲۷	-۱۰.۵۵۹	-۲۲.۶۵۶	$N^B(\Omega) = T(R, \Omega) \gamma_e^{-1}$	ژویید با بایاس توپوگرافی
۰.۵۷۲	۰.۲۰۷	۱.۵۶۸	۰.۳۲۸	$[2\pi G\rho] H_{nm}^2$	بایاس توپوگرافی
۰.۰۰۰۱	۰.۰۰۰۲	۰.۰۰۰۶	.	$[4\pi G\rho / (3R)] H_{nm}^3$	بایاس توپوگرافی
۰.۰۰۵	-۰.۰۰۰۲	۰.۰۱۶	-۰.۰۳۲	$[2\pi G\rho / (12R^2)] n(n+1)H_{nm}^4$	بایاس توپوگرافی

جدول ۲: اختلاف مدل‌های مختلف ژویید با ژویید حاصل از نقاط ترازیابی با GPS. واحد متر

خطا متوسط مربعی	انحراف معیار	میانگین	بیشینه	کمینه	مدل ژویید
۰.۵۲۶	۰.۱۷۶	۰.۴۹۵	۱.۱۷۸	۰.۲۴۲	آنومالی ارتفاعی
۰.۵۷۳	۰.۲۶۱	۰.۵۱۰	۱.۵۵۳	۰.۲۰۰	ژویید همراه بایاس توپوگرافی
۰.۲۶۳	۰.۱۲۱	۰.۲۳۴	۰.۲۷۲	-۰.۱۴۹	ژویید + اثر توان دوم توپوگرافی
۰.۲۶۱	۰.۱۲۱	۰.۲۳۲	۰.۷۲۱	-۰.۱۵۰	ژویید + اثر توان دوم، سوم و چهارم توپوگرافی
۰.۲۱۳	۰.۱۲۶	۰.۱۷۱	۰.۷۰۲	-۰.۲۴۷	ژویید + اثر رابطه (۵) روی ژویید
۰.۲۴۵	۰.۱۱۶	۰.۲۱۶	۰.۷۱۱	-۰.۱۵۹	ژویید روش رَپ با ارتفاع هارمونیک
۰.۲۰۰	۰.۱۲۵	۰.۱۵۷	۰.۶۷۹	-۰.۲۴۳	ژویید روش رَپ با ارتفاع نقاط

دقت نسبی دو روش با دقت حدود یک سانتیمتر یکی هستند. علاوه بر این، دو روش، نزدیکی نقاط ژویید مدل EGM08 به نقاط ترازیابی با GPS را بهمیزان قابل توجه ۶۰٪ بهبود می‌بخشد. در صورتی که ارتفاع ارتمتریک نقاط در اختیار باشد، استفاده از رابطه (۵) علاوه بر سادگی محاسبات، دقت بالایی را برای محاسبه بایاس توپوگرافی در اختیار قرار می‌دهد. همچنین نتایج عددی حاکی از این است که ژویید به روش رَپ انطباق مطلق و نسبی بهتری نسبت به روش انتقال تحلیلی دارد.

## ۵- نتیجه گیری

در این مطالعه اثر توپوگرافی با دو روش انتقال تحلیلی و رَپ، به منظور دست یابی به ارتفاع ژویید با استفاده از مدل‌های ژئوپتانسیل بررسی شد. روش انتقال تحلیلی بر مبنای تعیین مستقیم ژویید در داخل توپوگرافی همراه با تعیین بایاس توپوگرافی است. روش رَپ به طور غیر مستقیم بر مبنای تعیین آنومالی ارتفاعی در خارج توپوگرافی (سطح زمین) و تبدیل آن به ژویید است. با احتساب این که سهم عمده اثر توپوگرافی ناشی از توان دوم ارتفاع آن است، دو روش از نظر تئوری با یکدیگر تقریباً هم ارز هستند. نتایج عددی ما نشان داد.

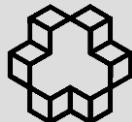
## مراجع

- [1] Agren J. (2004), “The analytical continuation bias in geoid determination

using potential coefficients and terrestrial gravity data”, Journal of Geodesy, Vol. 78,

pp. 314-332.

- [2] Balmino G., N. Vales, S. Bonvalot, and A. Briais (2012), “Spherical harmonic modelling to ultra-high degree of Bouguer and isostatic anomalies”. *Journal of Geodesy*, Vol. 86, pp. 499–520.
- [3] Heiskanen W. and H. Moritz (1967), *Physical Geodesy*. San Francisco: WH Freeman.
- [4] Jekeli C. (1981), “The downward continuation to the Earth’s surface of the truncated spherical and ellipsoidal harmonic series of gravity and height anomalies”. Rep. 327, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- [5] Jekeli C. (1982), “A numerical study of the divergence of spherical harmonic series of the gravity and height anomalies at the Earth’s surface”. *Bull. Geod. Sci. Affini*, Vol. 57, pp. 10–28.
- [6] Martinec Z. and P. Vanicek (1996), “Formulation of the boundary - value problem for geoid determination with a higher-degree reference field”. *Geophysical Journal International*, Vol. 126, pp. 219–228.
- [7] Martinec Z. (1998), Boundary-value problems for gravimetric determination of a precise geoid. Lecture Notes in Earth Sciences no.73. Berlin Heidelberg New York: Springer.
- [8] Nahavandchi H and L.E. Sjoberg (1998), “Terrain correction to power  $H^3$  in gravimetric geoid determination”. *Journal of Geodesy*, Vol. 72, pp. 124–135.
- [9] Nahavandchi H. (2002), “Two different method of geoidal determination using a spherical harmonic representation of the geopotential, topographic corrections and the height anomaly– geoid height difference”. *Journal of Geodesy*, Vol. 76, pp. 345-352.
- [10] Rapp R.H. (1997), “Use of potential coefficient models for geoid undulation determinations using aspherical harmonic representation of the height anomaly - geoid undulation difference”. *Journal of Geodesy*, Vol. 71, pp. 282–289.
- [11] Sjoberg L.E. (1977), “On the errors of spherical harmonic developments of gravity at the surface of the Earth”. Rep. 257, Department Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- [12] Sjoberg L.E. (1995), “On the quasigeoid to geoid separation”. *Manuscr.Geod.*, Vol. 20, pp. 182–192.
- [13] Sjoberg L.E. (2007), “The topographic bias by analytical continuation in physical geodesy”. *Journal of Geodesy*, Vol. 81, pp. 345-350.
- [14] Sjoberg L.E. (2009a), “The terrain correction in gravimetric geoid computation - is it needed?” *Geophysical Journal International*, Vol. 176, pp. 14-18.
- [15] Sjoberg L.E. and M. Bagherbandi (2011), “A Numerical study of the analytical downward continuation error in geoid computation by EGM08”. *Journal of Geodetic Science*, Vol. 1, pp. 2-8.
- [16] Sjoberg L.E. (2015), “The topographic bias in Stokes’ formula vs. the error of analytical continuation by an Earth Gravitational Model - are they the same?”. *Journal of Geodetic Science*, vol. 5, pp. 171-179.
- [17] Vanicek P., M.Najafi, Z.Martinec, L.Harrie and LE.Sjoberg (1955), “Higher order reference field in the generalized Stokes–Helmert’s scheme for geoid computation”. *Journal of Geodesy*, Vol. 70, pp. 176–182.
- [18] Vermeer M. (2007), “Comment on Sjoberg (2007), The topographic bias by analytical continuation in physical geodesy Journal of Geodesy, Vol. 81, pp.345-350”. *Journal of Geodesy*, Vol. 81, pp. 445-450.



## Terrain effect in geoid determination by geopotential models

Soheil Hejrati<sup>\*1</sup>, Mehdi Goli<sup>2</sup>

1- Graduated of MSc. Geodesy, Dept. of Engineering, Azad University of Science and Research Ssahrood, Iran.  
2- Assistant Professor, Dept. of Civil Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

### Abstract

Topographic masses above the geoid are considered as a major obstacle in geoid determination by using Global Gravitational Models (GGMs). GGMs provide the possibility of the Earth's potential field modeling as the expansion of the external-type series of spherical harmonics. Applying the external expansion to obtain disturbing potential on the geoid within the topographic masses will cause a bias called 'topographic bias'. This study deals with calculating geoidal height using Earth Gravitational Model 2008 (EGM08). In order to do so, two methods of Direct Analytical Continuation one and Rapp's Indirect one are utilized. The Analytical Continuation Approach is based on using EGM08 within the topographic masses and applying topographic bias. Alternatively, Rapp's Approach is based on calculating height anomaly and its downward continuation on the geoid. The success of these two methods to geoid simulation on 490 GPS-Levelling stations in mountainous region of Colorado in the USA were evaluated. The results are an indicator of the fact that two methods are compatible with each other with centimetric accuracy compared to GPS-Levelling points. Also, it suggests an improvement in the relative and absolute accuracy of the geoidal height resulting from EGM08 about 60% in both methods. The numerical investigation revealed that taking advantage of height harmonic models instead of point actual height can bring a bias in the matter of a few centimeters on the geoid. Moreover, the absolute accuracy of Rapp's Approach is higher than Analytical Continuation Approach in geoid determination in comparison GPS-Levelling points.

**Key words:** Analytical Continuation, Topographic bias, Geoid, Earth Gravitational Model

**Correspondence Address.** Saadat abad, Mokhaberat, Peyvand Street, alley 14, No 14, Tehran, Iran.  
Tel: +98 21 22136882 / +98 911 281 5699

Email: hejrati.soheyl@gmail.com ; hejrati@iau-shahrood.ac.ir