مهندسی فناوری اطلاعات مکانی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی نقشه برداری

سال یکم، شماره دوم، زمستان ۱۳۹۲
Vol.1, No.3, Winter 2014

تلفیق طیفی در مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی برداری

مهدی اسحاق*

دانشیار گروه ژئودزی و ژئوانفورماتیک، دانشگاه سلطنتی صنعتی، استکهلم، سوئد

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۲/۱۰/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۲/۱۲/۲۲

چکیده

در برخی از مسائل مربوط به مقدار مرزی، بیش از یک مقدار مرزی وجود دارد و بدین ترتیب صرفاً راه‌حلی واحد برای مسئله موجود نیست. مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی برداری از جمله همین مسائل است، که دارای دو حل انتگرالی است. در این مقاله، این مسئله ابتدا در دامنه طیفی حل می‌شود و سپس به فرمول‌های انتگرالی در دامنه مکانی بدل می‌گردد. کرنل این انتگرال‌ها واگرا هستند، ولی با استفاده از روش تلفیق طیفی این کرنل‌ها هم‌گرا می‌شوند و حتی خاصیت ادامه فروسودهندگی نیز به آنها داده خواهد شد. بدین منظور، برآوردگرهای آماری متفاوتی برای به‌دست آوردن نوسان پتانسیل در سطح دریا ارائه می‌شود و ضریب تلفیقی هر کدام به روش آماری برآورد می‌گردد. محاسبات عددی نشان می‌دهند که کرنل‌های هم‌گرا شده، علاوه بر داشتن خاصیت ادامه فروسودهندگی و صافی وینر، خاصیت اصلاح‌کنندگی نیز دارند، به‌طوری‌که کرنل هم‌گرا شده خوش‌رفتار است و سهم داده‌های در دست را به‌راحتی کاهش می‌دهد. روش ارائه شده در این مقاله را به آسانی می‌توان برای تلفیق داده‌های گرانی‌سنجی برداری ماهواره‌ای و یا هوابرد استفاده کرد.

کلیدواژه‌ها: توابع هم‌ساز کروی برداری، میدان برداری، خاصیت تعامد، همگرایی، برآوردگر اریب و نااریب.

* نویسنده مکاتبه‌کننده: گروه ژئودزی و ژئوانفورماتیک، دانشگاه سلطنتی صنعتی، خیابان تکنیکرینگن ۷۲، کدپستی ۱۰۰۴۴، استکهلم، سوئد. تلفن: ۰۰۴۶۸۷۹۰۷۳۶۹
Email: eshagh@Kth.se

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

۱- مقدمه

در حل مسئله مقدار مرزی، همواره یافتن تابعی به‌وسیله مقادیر تابع بر روی مرز جست‌وجو می‌شود. برخی از این‌گونه مسائل دارای چندین مقدار مرزی هستند و بنابراین بیش از یک حل برای تابع مورد نظر وجود دارد. آن دسته از مسائل مقدار مرزی که بر روی میدان‌های برداری و تنسوری تعریف می‌شوند، از همین قبیل‌اند. در مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی برداری[1] مشتق‌های نخست میدان گرانشی همان مقادیر مرزی مسئله‌اند. از جمله شرایط لازم برای حل چنین مسئله‌ای، داشتن توابع پایه متعامد است که بایستی از لحاظ ریاضی با مقادیر مرزی همخوان باشند. مسائل مقدار مرزی در میدان‌های برداری و تنسوری، کاربردهای فراوان در ژئوفیزیک و ژئودزی فیزیکی دارند و چونان ابزاری کارآمد در حل مسائل پیچیده به کار می‌روند. به‌عنوان مثال می‌توان به مسائل گرانی‌سنجی برداری، گرادیومتری گرانشی[2] و مدل‌سازی میدان مغناطیسی زمین اشاره کرد. هدف عمده در ژئودزی فیزیکی در واقع تعیین شکل و ابعاد زمین به‌وسیله داده‌های گرانی‌سنجی است. این نوع داده‌ها را می‌توان به صورت‌های اسکالر، برداری و تنسوری اندازه‌گیری کرد. به عبارت دیگر، مقدار مطلق شتاب گرانش، یا مشتق‌های نخست و دوم میدان گرانش مشاهده می‌شوند و هدف یافتن پتانسیل گرانشی در خارج از مرز تعریف شده است. مسئله حل پتانسیل گرانشی به‌وسیله مقدار مطلق شتاب گرانشی، به مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی اسکالر معروف است. مسئله تعیین پتانسیل گرانشی از طریق مشتقات یکم و دوم میدان به ترتیب به عنوان مسائل مقدار مرزی گرانی‌سنجی برداری و گرادیومتری و گرانشی شناخته شده‌اند. مسائل مقدار مرزی در ژئودزی فیزیکی موضوع تازه‌ای نیستند و در بسیاری از مسائل به‌کار گرفته شده‌اند و می‌شوند. مسئله گرانی‌سنجی برداری بیشتر در مأموریت‌های ماهواره‌ای و هوابرد[3] مطرح می‌گردد. در این موضوع سه شتاب‌سنج به‌طور متعامد در دستگاه گرانی‌سنج نصب می‌شوند، که شتاب میدان گرانشی زمین را در سه جهت متعامد اندازه‌گیری می‌کنند. برای یافتن اطلاعات بیشتر در مورد گرانی‌سنجی برداری، ن.ک. باستوس و همکاران [۱]، فدرستون و همکاران [۲]، جکلی [۳]، جکلی و کوان [۴]، لی [۵]، و سرپاس و جکلی [۶].

در مورد گرانی‌سنجی برداری و گرادیومتری گرانشی می‌توان به مطالعات ون گلدرن [۷]، ون گلدرن و رومل [۸، ۹] در این خصوص اشاره کرد، که در حل مسائل مقدار مرزی ژئودتیکی در این زمینه کوشیده‌اند. مارتینک [۱۰] توابع گرین مربوط به حل مسئله مقدار مرزی گرادیومتری را به‌دست آورد و با ناکامل برشمردن حل ون گلدرن و رومل، مشکل حل آنها را در کار خود برطرف ساخت. بولینگ و گرافارند [۱۱] مسئله مقدار مرزی گرادیومتری را به‌وسیله توابع هم‌ساز کروی و بیضوی ارائه کردند.

همان‌گونه که بیان شد، گاه چندین حل برای مسائل مقدار مرزی برداری وجود دارد. این حل‌ها از بُعدِ نظری می‌بایست نتایج یکسانی را به دست دهند، اما در عمل چنین نیست. علت اصلی این تفاوت، ماهیت متفاوت خطا در نوع مقادیر مرزی و همچنین اختلاف مدل ریاضی آنهاست. تلفیق مسائل مقادیر مرزی با یکدیگر را، نخستین بار بیرهامر [۱۲] به صورت آماری مطرح کرد. به‌دنبال کار بیرهامر [۱۲]، اسحاق [۱۳] به تلفیق حل‌های انتگرالی مسئله مقدار مرزی گرادیومتری گرانشی با هم پرداخت. نظریه تلفیق طیفی[4] انتگرال‌ها و مدل‌های ژئوپتانسیل را نخستین بار شوبرگ [۱۴، ۱۵] و ونزل [۱۶] مطرح کردند. شوبرگ [۱۷، ۱۸] این نظریه را بیشتر گسترش داد و اصلاح کرنل به روش آماری[5] را ارائه کرد. برای دیدن و بررسی

1. Vector gravimetry
2. Gravity gradiometry
3. Air borne
4. Spectral Combination
5. Least-squares modification

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

پیشرفت‌های بیشتر این نظریه، ن.ک. شوبرگ [۱۹، ۲۰]. بعدها این روش اصلاح کرنل[1] را اوگرن [۲۱]، المان [۲۲]، کیامهر [۲۳]، داراس [۲۴] و عبداله [۲۵] به گونه‌ای موفقیت‌آمیز برای تعیین ژئوئید محلی به کار بردند. اسحاق [۲۶] از این روش برای تولید مشتقات مرتبه دوم میدان گرانشی در ارتفاع ماهواره نیز استفاده کرد. افزون بر آن [۲۷]، وی یک روش اصلاح کرنل نیمه‌آماری[2] نیز برای تولید این مشتقات ارائه کرد.

شرنینگ و همکاران [۲۸] سه روش متفاوت را برای تعیین محلی میدان گرانشی از داده‌های گرادیومتری گرانشی ماهواره‌ای مطرح ساختند، اما روش انتگرالی آنها را اسحاق [۲۹] گسترش داد. وی با محدود کردن شکل طیفی[3] کرنل‌های واگرای هر انتگرال، در حل مسئله کوشید و افزون بر آن با استفاده از صافی وینر[4]، خطای داده‌های گرادیومتری گرانشی را تا حدی کنترل کرد. مسئله به‌دست آوردن حل انتگرالی برای داده‌های گرانی‌سنجی برداری کاملاً مشابه با گرادیومتری گرانشی است. موضوع اصلی این مقاله، به‌دست آوردن حل انتگرالی برای محاسبه میدان گرانشی زمین از داده‌های گرانی‌سنجی برداری و هم‌گرا کردن این کرنل‌ها به روش آماری است، و سپس نیز تلفیق طیفی آنها ـ که موضوعی کاملاً جدید و کاربردی است. به علاوه، چند برآوردگر آماری هم برای نوسان پتانسیل[5] در سطح دریا ارائه و تشریح می‌گردند.

۲- مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی برداری

مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی برداری یکی از انواع مسائل مقادیر مرزی ژئودتیکی است. در این مسئله، یافتن یک تابع به‌وسیله مقادیر مشتقات مرتبه اول آن در مرز، که در معادله لاپلاس صادق باشد، دنبال می‌شود. هرگاه سخن از مشتق به میان می‌آید، چارچوب محاسبه آن می‌بایست از پیش تعیین شود. چارچوب محلی شمال‌گرا[6] از چارچوب‌های شناخته شده در این خصوص است که در گرانی‌سنجی برداری استفاده می‌شود. محور x این سیستم به سمت شمال، و محور z در خلاف جهت بردار گرانش است؛ و چارچوب نیز راست‌گرد در نظر گرفته می‌شود. مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی برداری را می‌توان بدین صورت تعریف کرد:

$\Delta T = ۰$ در حالی‌که $r>R$

$T_i = \mathrm{grad}(T)$ و $i = x, y, z$

$T \sim O\left(\frac{1}{r}\right)$ و $r \to \infty$

در رابطه مذکور، T نوسان پتانسیل، r فاصله ژئوسنتریک هر نقطه خارج از مرز، R شعاع کره‌ای که در این مسئله مرز فرض می‌شود، grad همان عملگر گرادیان در چارچوب محلی، و T_i بردار داده‌های گرانی‌سنجی بر روی مرز است. هدف نیز در واقع به‌دست آوردن تابع T در خارج از مرز R به‌وسیله داده‌های برداری T_i است.

حل معادله لاپلاس[7] دارای دو جواب خواهد بود که یکی از آنها با میدان گرانشی زمین هم‌خوانی دارد. این جواب همان سری معروف هم‌سازهای کروی[8] از نوع خارجی است:

رابطه (۱)

$$T(P) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=-n}^{n} t_{nm} Y_{nm}(P)$$

در این رابطه P موقعیت هر نقطه خارج از مرز است، t_{nm} ضرایب هم‌سازهای کروی نوسان پتانسیل با درجه n و مرتبه m، Y_{nm} هم‌سازهای کروی نرمال شده کامل از نوع مختلط یعنی $Y_{nm}(P) = e^{im\lambda}\bar{P}_{n|m|}(\cos\theta)$ که در آن θ متمم عرض ژئودتیک و λ طول ژئودتیک نقطه P است.

1. Kernel
2. Semi-stochastic
3. Spectral form
4. Wiener filter
5. Disturbing potential
6. Local north-oriented frame
7. Laplace
8. Spherical harmonics

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

$\overline{P}_{n|m|}$ توابع لژندار نرمال‌شده کامل و e تابع نمـایی و در نهایت i نماد موهومی مختلط است.

در مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی بـرداری، هـدف یافتن ضرایب هم‌سازهای کـروی t_{nm} و در نهایـت T(P) پتانسیل در خارج از مرز R به‌وسیله عناصر بردار گرانـی مشاهده شده است.

۲-۱- بیان داده‌هـای گرانـی‌سـنجی بـه‌وسـیله همسازهای کروی

بیان ریاضی مشتقات نوسان پتانسـیل، بـه طـور کامـل وابسته به چارچوب مختصات در نظر گرفته شده اسـت، زیرا عملگر گرادیان در هر چارچوب به گونه‌ای متفـاوت از چارچوب دیگر تعریف می‌شود. تعریف این عملگـر در چارچوب محلی شمال‌گرا چنین است:

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{r\partial\theta} \frac{\partial}{r\sin\theta\partial\lambda}\right] \qquad \text{رابطه (۲)}$$

چنانچـه ایـن عملگـر روی معادلـه (۱) نیـز اعمـال گردد، سه عضو بردار به دست آمده، چنین خواهند بود:

رابطه (۳-الف)

$$T_z = (P) = -\frac{1}{R}\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=-n}^{n} t_{nm}Y_{nm}(P),$$

رابطه (۳-ب)

$$T_x(P) = \frac{1}{R}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=-n}^{n} t_{nm}\frac{\partial Y_{nm}(P)}{\partial\theta},$$

رابطه (۳-پ)

$$T_y(P) = \frac{1}{R}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=-n}^{n} t_{nm}\frac{\partial Y_{nm}(P)}{\mathrm{Sin}\theta\partial\lambda}$$

در مسئله گرانی‌سـنجی بـرداری $T_x(P)$، $T_y(P)$ و $T_z(P)$ مشـتقات نوسـان پتانسـیل مشـاهده (مقـادیر مرزی) در نظر گرفته می‌شـود و هـدف بـه‌دسـت‌آوردن t_{nm} از آنهاست. اسحاق [۳۰] بیان هم‌ساز دیگری برای این مشتقات در چارچوب کروی ارائه کرده است.

۲-۲- هم‌سازهای کروی برداری[1]

در میان روابط (۳-الف)، (۳-ب) و (۳-پ) تنهـا رابطـه (۳-الف) دارای توابع پایه متعامد است. در چنین حالتی به آسانی می‌توان با توجه به تعامد هـم‌سـازهای کـروی رابطه انتگرالی برای محاسبه ضرایب آنها به‌دسـت آورد؛ ولی چنین قضیه‌ای برای رابطه (۳-ب) و (۳-پ) صادق نیست، زیرا بـا اعمـال عملگـر مشـتق، خاصـیت تعامـد همسازهای کروی از بین می‌رود. بنـابراین بایـد مسـئله گرانـی‌سـنجی بـرداری بـه روش دیگـری حـل شـود. هم‌سازهای کروی برداری ابزارهـای مناسـب در کـار بـا میدان‌های برداری به‌شمار می‌آینـد کـه در ایـن بخـش معرفی می‌گردند و چگونگی بـه‌کـارگیری آنهـا در حـل مسئله مقـدار مـرزی گرانـی‌سـنجی بـرداری نیـز بیـان می‌شود. به‌طور کلی میدان برداری $\mathbf{v}(P)$ را می‌تـوان بـه هم‌سازهای کروی برداری، به نحوی که در ادامه می‌آید، گسترش داد:

رابطه (۴-الف)

$$\mathbf{v}(P) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{j=1}^{3} v_{nm}^{j}\mathbf{X}_{nm}^{j}(P)$$

که در این رابطـه $\mathbf{X}_{nm}^{j}(P)$ هـم‌سـازهای کـروی بـرداری از نـوع j و v_{nm}^{j} ضـرایب آنهـا هسـتند. هم‌سـازهای کـروی بـرداری، ایـن خاصـیت تعامـدی را دارند[۱۰]:

رابطه (٤-ب)

$$\iint_{\Omega}\mathbf{X}_{nm}^{j}(Q).\left[\mathbf{X}_{n'm'}^{j'}(Q)\right]^{*}d\Omega = 4\pi\left[N_n^j\right]^2\delta_{nn'}\delta_{mm'}\delta_{jj'}$$

به‌طوری‌که ❋ مزدوج مخـتلط هـم‌سـازهای کـروی برداری، δ تابع دلتای کرونکـر[2] و « . » عملگـر ضـرب

1. Vector spherical harmonics
2. Kronecker's delta

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

داخلی، Q نقاط انتگرال‌گیری، Ω کره واحـد و $d\Omega$ و عنصر انتگرال‌گیری مسطحاتی است. همچنین نرم[1] این توابع نیز عبارت‌اند از:

رابطه (۴- پ)

$$\left[N_n^j\right]^2 = \begin{cases} 1 & j=1 \\ n(n+1) & j=2 \\ n(n+1) & j=3 \end{cases}$$

روابط بین هم‌سازهای کروی و هـم‌سـازهای کـروی برداری اینها هستند [۱۰] :

رابطه (۵- الف)

$$\mathbf{X}_{nm}^1(Q) = Y_{nm}(Q)\mathbf{e}_z$$

رابطه (۵-ب)

$$\mathbf{X}_{nm}^2(Q) = \frac{\partial Y_{nm}(Q)}{\partial\theta}\mathbf{e}_x + \frac{\partial Y_{nm}(Q)}{\sin\theta\partial\lambda}\mathbf{e}_y$$

رابطه (۵-پ)

$$\mathbf{X}_{nm}^3(Q) = \frac{\partial Y_{nm}(Q)}{\partial\theta}\mathbf{e}_y - \frac{\partial Y_{nm}(Q)}{\sin\theta\partial\lambda}\mathbf{e}_x$$

به‌طوری‌که $\mathbf{e}_x$، $\mathbf{e}_y$ و $\mathbf{e}_z$ بردارهای یکـه چـارچوب محلی شمال‌گرا هستند.

۲-۳- حل مسئله مرزی گرانی‌سنجی بــرداری در دامنه طیفی[2]

تعامد هم‌سازهای کروی برداری بسیار مفید اسـت و در ساده کـردن و آنـالیز داده‌هـای گرانـی‌سـنجی بـرداری کاربرد می‌یابند. برای توضیح این قضیه، بردار مشاهدات را بدین صورت در نظر بگیرید:

رابطه (۶-الف)

$$\mathbf{T}(P) = T_z(P)\mathbf{e}_z + T_x(P)\mathbf{e}_x + T_y(P)\mathbf{e}_y$$

این بردار را می‌توان با هم‌سازهای کروی برداری نیز بدین صورت بیان کرد.

رابطه (۶-ب)

$$\mathbf{T}(P) = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} t_{nm}^1\mathbf{X}_{nm}^1(P) + t_{nm}^2\mathbf{X}_{nm}^2(P)$$

با توجه به خاصیت تعامد هم‌سازهای کـروی روابـط (۴-ب) و (۴-پ) می‌توان نوشت:

رابطه (۶-پ)

$$t_{nm}^1 = \frac{1}{4\pi(n+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \iint_{\Omega} T_z(Q)\mathbf{e}_z \cdot \left[\mathbf{X}_{nm}^1(Q)\right]^* d\Omega$$

رابطه (۶-ت)

$$t_{nm}^2 = \frac{1}{4\pi n(n+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \iint_{\Omega} \left(T_x(Q)\mathbf{e}_x + T_y(Q)\mathbf{e}_y\right) \cdot \left[\mathbf{X}_{nm}^2(Q)\right]^* d\Omega$$

با ساده‌سازی روابط (۶-پ) و (۶-ت)، این روابط بـه دست می‌آیند. [2]

رابطه (۷-الف)

$$t_{nm}^1 = \frac{1}{4\pi(n+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \iint_{\Omega} T_z(Q) Y_{nm}^*(Q) d\Omega$$

رابطه (۷-ب)

$$t_{nm}^2 = \frac{1}{4\pi n(n+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \iint_{\Omega} \left(T_x(Q)\frac{\partial Y_{nm}^*(Q)}{\partial\theta} + T_y(Q)\frac{\partial Y_{nm}^*(Q)}{\sin\theta\partial\lambda}\right) d\Omega$$

روابط (۷-الف) و (۷-ب) حل مسئله مقدار مرزی در دامنه طیفی‌اند؛ اما برای محاسبه ضـرایب هـم‌سـازهای

1. Norm
2. Spectral domain

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

کروی نوسان پتانسیل، به داده‌های گرانی‌سنجی با پوششی جهانی نیاز است. از این روش در گرانی‌سنجی ماهواره‌ای نیز می‌توان استفاده کرد، زیرا داده‌های ماهواره‌ای پوششی نسبتاً مناسب دارند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نسبت $(r/R)^{n+2}$، همان فاکتور ادامه فروسودهنده[1] است که با افزایش درجه هم‌سازها رشد می‌کند، و با میل کردن درجه به سمت بی‌نهایت، جواب نیز به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد. بنابراین حل ضرایب هم‌ساز، مسئله‌ای بدوضع[2] است از طرفی با افزایش درجه ضرایب، این فاکتور هر دم بیشتر رشد می‌کند و به شدت موجب تقویت و خطای داده‌های گرانی می‌شود. از آنجا که نویز داده‌ها دارای بسامد بالایی است، بنابراین فیلتر کردن آنها در بسامد ـ یا درجات ـ بالا، کار ساده‌ای نخواهد بود. علاوه بر نویز داده‌ها، خطای گسستگی[3] انتگرال‌ها در محاسبات عددی، خطای سیستماتیک دیگری را نیز به مسئله می‌افزاید. گسستگی انتگرال‌ها کاملاً وابسته به فاصله داده‌ها از همدیگرند که از نظر اجرایی مشاهده داده‌های متراکم کار ساده‌ای نیست. بدین ترتیب می‌بایست به داشتن جواب نرم برای میدان گرانشی راضی بود و ضرایب را تا درجات خیلی بالا محاسبه نکرد. البته یافتن درجه بیشینه برای این ضرایب خود مسئله دیگری را مطرح می‌کند. محدود کردن درجه برآورد ضرایب هم‌سازهای کروی، نوعی روش منظم‌سازی در دامنه طیفی است که تشابه زیادی با روش تی‌اس وی دی[4] دارد. همان‌طور که هیسکانن و موریتس [۳۱] نیز ذکر کرده‌اند، محدود ساختن و حذف بسامدهای بالای هر مسئله‌ای منظم‌سازی نامیده می‌شود.

۲-۴- حل مسئله گرانی‌سنجی برداری در دامنه مکانی[5]

در بخش پیشین، مبحث آنالیز هم‌ساز داده‌های گرانی‌سنجی مطرح شد ولی برای این منظور مشاهدات باید پوشش جهانی داشته باشند. در مسئله تعیین میدان گرانشی در قالب محلی، همواره داده‌ها محدود به منطقه خاصی هستند، و در نتیجه حل مسئله می‌بایست از دامنه طیفی تبدیل به حل در دامنه مکانی شود تا بتوان روابط ریاضی را به منطقه مورد نظر محدود ساخت.

برای یافتن چنین روابطی، ضرایب هم‌سازهای کروی به‌دست آمده t_{nm}^{1} و t_{nm}^{2} بجای t_{nm} در رابطهٔ (۱) قرار می‌گیرند و نوسان پتانسیل بر روی سطح کره R=r به‌دست می‌آید؛ یعنی در عمل نوسان پتانسیل ادامه فروسو به سطح مرز داده می‌شود. بنابراین، خواهیم داشت:

رابطه (۸-الف)

$$T(P_0)=\frac{R}{4\pi}\iint_{\Omega}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2}\sum_{m=-n}^{n}Y_{nm}^{*}(Q)\,Y_{nm}(P)\,T_z(Q)\,d\Omega$$

رابطه (۸-ب)

$$T(P_0)=\frac{R}{4\pi}\iint_{\Omega}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2}\sum_{m=-n}^{n}\left(\frac{\partial Y_{nm}^{*}(Q)}{\partial\theta}\mathbf{e}_x+\frac{\partial Y_{nm}^{*}(Q)}{\sin\theta\,\partial\lambda}\mathbf{e}_y\right)\left(T_x(Q)\mathbf{e}_x+T_y(Q)\mathbf{e}_y\right)Y_{nm}(P)\,d\Omega$$

در این روابط P_o هر نقطه روی سطح مرزی است. با استفاده از قضیه مجموعه هم‌سازهای کروی[6] ([۳۱]):

رابطه (۸-پ)

$$\sum_{m=-n}^{n}Y_{nm}^{*}(Q)\,Y_{nm}(P)=(2n+1)\,P_n(\cos\psi)$$

1. Dawnward continuation
2. Ill-posed
3. Discretization error
4. TSVD (Truncated Singular Value Decomposition)
5. Dawnward continuation
6. Addition theorem of spherical harmonics

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

در این رابطه، ψ زاویه ژئوسنتریک بین نقطه P و Q است. بنابراین پس از ساده‌سازی روابط (۸-الف) و (۸-ب) خواهیم داشت:

رابطه (۸-ت)

$$T(P_\circ)=\frac{R}{4\pi}\iint_{\Omega}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} P_n(\cos\psi)T_z(Q)d\Omega$$

رابطه (۸-ث)

$$T(P_\circ)=\frac{R}{4\pi}\iint_{\Omega}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} P_{n1}(\cos\psi)\left(-T_x(Q)\cos\alpha+T_y(Q)\sin\alpha\right)d\Omega$$

در رابطه (۸-ث)، α آزیموت بین نقطه $P_\circ$ و Q است. برای جزئیات بیشتر در مورد نحوه ایجاد این آزیموت، ن.ک. مارتینک [۱۰].

همان‌طور که در روابط (۸-ت) و (۸-ث) می‌توان دید، کرنل هیچ کدام از انتگرال‌ها همگرا نیست، زیرا با میل کردن درجه به سمت بی‌نهایت، کرنل نیز به همان‌سو میل خواهد کرد. مشابه با این مسئله، اسحاق [۲۹] با محدود ساختن هر دو سری به درجه محدود ۲۵۰ و استفاده از صافی وینر، به ادامه فروسوی داده‌های گرادیومتری ماهواره‌ای کوشید. اما در این مطالعه، هدف در واقع پیدا کردن کرنل‌های هم‌گرا برای ادامه فروسوی داده‌های گرانی‌سنجی برداری است که تنها با استفاده از روش آماری و در نظر گرفتن نویز داده‌های گرانی امکان‌پذیر است. این مسئله در بخش بعدی بررسی خواهد شد.

۳- تلفیق طیفی در مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی برداری

با توجه به روابط (۸-پ)، (۷-الف)، (۷-ب) و (۱) می‌توان نوسان پتانسیل را در فاصله ژئوسنتریک r به این صورت نمایش داد:

رابطه (۹-الف)

$$T(P)=\sum_{n=2}^{\infty}\kappa_n T_{v,n}(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}\sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)B_n^{v}P_n(\cos\psi)T_z(Q)d\sigma$$

رابطه (۹-ب)

$$T(P)=\sum_{n=2}^{\infty}\kappa_n T_{h,n}(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}\sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)B_n^{h}P_{n1}(\cos\psi)\left(-T_x(Q)\cos\alpha+T_y(Q)\sin\alpha\right)d\sigma$$

رابطه (۹-پ)

$$T_{k,n}(P)=\sum_{m=-n}^{n}t_{nm}^{k}Y_{nm}(P)$$

و

$$B_n^k=\begin{cases}-R/(n+1) & k=v\\ R/n(n+1) & k=h\end{cases}$$

و

$$\kappa_n=\left(\frac{R}{r}\right)^{n+2}$$

نوشتن روابط (۹-الف) و (۹-ب) این مزیت را دارد که فاکتور واگراکننده κ_n^{-1} از داخل کرنل انتگرال خارج می‌گردد و مشکل واگرایی کرنل برطرف می‌شود. اما در حقیقت با حل این دو انتگرال فقط داده‌های گرانی به نوسان پتانسیل در ارتفاع r تبدیل می‌شود، بدون هیچ‌گونه ادامه فروسویی به سطح دریا. کرنل انتگرال (۹-الف) شبیه کرنل معروف هوتین[۱] است. شوبرگ و اسحاق [۳۲] مسئله اصلاح این کرنل در فاصله ژئوسنتریک r را به منظور ادامه فروسوی داده‌های

1. Hotine

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

گرانی هوابرد بررسی کردند. سمت چپ روابط (۹-الف) و (۹-ب) شکل طیفی نوسان پتانسیل را نشان می‌دهد که نقشی تعیین‌کننده در امر تلفیق طیفی دارد.

۳-۱- ادامه فروسوی طیفی[1] داده‌های گرانی‌سنجی برداری

فرض کنید که $\tilde{T}(P_\circ)$ برآوردگر نوسان پتانسیل در سطح مرز کره r=R، و رابطه‌ای که در پی می‌آید نیز حالت کلی‌تری از انتگرال‌های (۹-الف) و (۹-ب) است.

رابطه (۱۰)

$$\tilde{T}(P_\circ)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n^k B_n^k T_{k,n}(P) \quad \text{و} \quad k=\text{v, h}$$

در این رابطه $P_\circ$ هر نقطه روی مرز است، و P هر نقطه خارج از مرز.

رابطه (۱۰) در حقیقت برآوردگری است برای نوسان پتانسیل در سطح مرز. دیگر اینکه a_n^k ضریبی است که برای این برآوردگر در نظر گرفته می‌شود و هدف تخمین این ضریب به گونه‌ای است که خاصیت ادامه فروسودهندگی در انتگرال‌های (۹-الف) و (۹-ب) ایجاد گردد. در این قسمت، نحوه برآورد این ضریب در یک قضیه ارائه می‌گردد:

قضیه ۱: ضریب ادامه فروسودهنده a_n^k برای برآوردگر (۱۰) چنین است:

$$a_n^k=\frac{\kappa_n}{\kappa_n^2+\left(B_n^k\right)^2\sigma_{k,n}^2\big/c_n} \quad \text{و} \quad k=\text{v, h}$$

در این رابطه c_n طیف نوسان پتانسیل و $\sigma_{k,n}^2$ طیف خطای داده‌های گرانی‌سنجی است.

برهان. فرض کنید $T_{k,n}(P)$ دارای خطای $\varepsilon_{k,n}(P)$ و با خاصیت $E\{\varepsilon_{k,n}(P)\}=0$ و $E\{\varepsilon_{k,n}(P)\varepsilon_{k,n'}(P)\}=0$ باشد که E همان عملگر امید ریاضی است. با اضافه کردن $\varepsilon_{k,n}(P)$ به $T_{k,n}(P)$ و جای‌گذاری نتیجه در (۱۰) و تفاضل نتیجه کل از نوسان پتانسیل روی سطح کره R، معادله خطای برآوردگر چنین خواهد شد:

رابطه (۱۱-الف)

$$\delta\tilde{T}(P_\circ)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n^k B_n^k T_{k,n}(P)+\sum_{n=2}^{\infty}a_n^k B_n^k\varepsilon_{k,n}(P)-\sum_{n=2}^{\infty}T_n(P_\circ)$$

با فرض اینکه خطای داده‌ها مستقل از خود داده‌هاست، پس از مجذور کردن رابطه (۱۱-الف) و گرفتن امید ریاضی و میانگین، طبق قضیه مقدار میانگین روی کره[2] خواهیم داشت:

رابطه (۱۱-ب)

$$E\left\{\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\left(\delta\tilde{T}^k(P_\circ)\right)^2 d\Omega\right\}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n^k\kappa_n-1\right)^2 c_n+\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n^k\right)^2\left(B_n^k\right)^2\sigma_{k,n}^2$$

رابطه (۱۱-پ)

$$c_n=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}E\left\{T_n(Q_\circ)T_{n'}(Q_\circ)\right\}d\Omega$$

و

$$\sigma_{n,k}^2=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}E\left[\varepsilon_{n,k}(Q)\varepsilon_{n',k}(Q)\right]d\Omega$$

$Q_\circ$ و Q به ترتیب نقاط انتگرال‌گیری روی سطح کره مرجع و ارتفاع پروازند.

رابطه (۱۱-ب) دارای دو جمله در سمت راست است، که نخستین جمله اریبی[3] برآوردگر و جمله دوم خطای آن را نشان می‌دهد. حال باید ضریب تلفیق a_n^k برآوردگر (۱۰) را به‌گونه‌ای به‌دست آورد که خطای آن، رابطه (۱۱-ب)، کمینه شود. پس از گرفتن مشتق از

---
1. Spectral downward continuation
2. Global average
3. Biasedness

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

این رابطه نسبت به a_n^k و قرار دادن نتیجه برابر با صفر و اندکی ساده‌سازی می‌توان قضیه را اثبات کرد.

با توجه به قضیه ۱ به آسانی می‌توان برآوردی از نوسان پتانسیل در سطح دریا از داده‌های گرانی‌سنجی هوایی یا ماهواره‌ای به‌دست آورد:

رابطه (۱۱-ت)

$$\tilde{T}(P_\circ)=\frac{1}{4\pi}\iint_\Omega\sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)a_n^v B_n^v P_n(\cos\psi)T_z(Q)d\Omega$$

رابطه (۱۱-ث)

$$\tilde{T}(P_\circ)=\frac{1}{4\pi}\iint_\Omega\sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)a_n^h B_n^h P_{n1}(\cos\psi)$$
$$\left(-T_x(Q)\cos\alpha+T_y(Q)\sin\alpha\right)d\Omega$$

همان‌طور که در این روابط ملاحظه می‌شود، کرنل‌های هر دو انتگرال تا زمانی‌که $\sigma_{k,n}^2$ مخالف صفر است، همگرا هستند. بنابراین خاصیت ادامه فروسودهندگی و همچنین هموارکنندگی در کرنل‌های انتگرال‌ها ایجاد می‌گردد و به‌راحتی می‌توان با انتگرال‌گیری از داده‌های گرانی‌سنجی برداری در فاصله ژئوسنتریک r، آنها را به نوسان پتانسیل روی سطح کره مرز مورد نظر تبدیل کرد. حال در صورتی‌که $\sigma_{k,n}^2$ برابر با صفر شود، نه تنها این خواص به وجود نمی‌آیند بلکه کرنل‌ها واگرا هم می‌شوند.

۳-۲- تلفیق طیفی و ادامه فروسوی داده‌های گرانی‌سنجی برداری

داده‌های گرانی‌سنجی برداری را نیز می‌توان همزمان ترکیب کرد و ادامه فروسو داد. بدین منظور، این برآوردگر را در نظر بگیرید:

رابطه (۱۲)

$$\tilde{T}(P_\circ)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n^v B_n^v T_{v,n}(P)+\sum_{n=2}^{\infty}a_n^h B_n^h T_{h,n}(P)$$

که در این رابطه ضرایب a_n^v و a_n^h می‌بایست به گونه‌ای تخمین زده شوند تا ادامه فروسوی داده‌ها و ترکیب آنها همزمان انجام گیرد. در این قسمت نیز نحوه برآورد این دو ضریب، در دو قضیه خلاصه می‌گردد.

قضیه ۲: ضرایب تلفیقی a_n^v و a_n^h در برآورد اریب[1] نوسان پتانسیل به‌وسیله رابطه (۱۲) اینها هستند:

$$a_n^v=\frac{\left(B_n^h\right)^2\sigma_{h,n}^2\kappa_n c_n}{\kappa_n^2 c_n\left(\left(B_n^v\right)^2\sigma_{v,n}^2+\left(B_n^h\right)^2\sigma_{h,n}^2\right)+\left(B_n^v\right)^2\sigma_{v,n}^2\left(B_n^h\right)^2\sigma_{h,n}^2}$$

$$a_n^h=\frac{\left(B_n^v\right)^2\sigma_{v,n}^2\kappa_n c_n}{\kappa_n^2 c_n\left(\left(B_n^v\right)^2\sigma_{v,n}^2+\left(B_n^h\right)^2\sigma_{h,n}^2\right)+\left(B_n^v\right)^2\sigma_{v,n}^2\left(B_n^h\right)^2\sigma_{h,n}^2}$$

برهان. طیف خطای $T_{v,n}(P)$ و $T_{h,n}(P)$ را به ترتیب $\varepsilon_{v,n}(P)$ و $\varepsilon_{h,n}(P)$ و با خواص

$$E\{\varepsilon_{h,n}(P)\}=\circ \quad \text{و} \quad E\{\varepsilon_{v,n}(P)\}=\circ$$
$$E\{\varepsilon_{v,n}(P)\varepsilon_{v,n'}(P)\}=\circ$$
$$E\{\varepsilon_{h,n}(P)\varepsilon_{h,n'}(P)\}=\circ$$

در نظر بگیرید. با افزودن این دو خطا به $T_{v,n}(P)$ و $T_{h,n}(P)$ و جای‌گذاری آنها در رابطه (۱۲) و کسر پتانسیل روی کره R از نتیجه، معادله خطا این‌گونه خواهد بود:

رابطه (۱۳- الف)

$$\delta\tilde{T}(P_\circ)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n^v\kappa_n+a_n^h\kappa_n-1\right)T_n(P_\circ)+$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}B_n^v\varepsilon_{v,n}(P)+\sum_{n=2}^{\infty}B_n^h\varepsilon_{h,n}(P)$$

جمله نخست رابطه (۱۳-الف) میزان اریبی برآوردگر را نشان می‌دهد و جمله‌های دوم و سوم به

1. Biased estimation

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

خطای داده‌ها مربوط می‌گردند. پس از مجذور کردن رابطه، اعمال امید ریاضی و میانگین‌گیری روی سطح کره R خطای برآورد چنین خواهد شد:

رابطه (۱۳-ب)

$$E\left\{\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\left(\delta\tilde{T}\left(P_{\circ}\right)\right)^{2}d\Omega\right\}=$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n^v\kappa_n+a_n^h\kappa_n-1\right)^2 c_n+$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n^v B_n^v\right)^2\sigma_{v,n}^2+\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n^h B_n^h\right)^2\sigma_{h,n}^2$$

به منظور کمینه کردن این خطا باید از رابطه (۱۳-ب) نسبت به دو ضریب a_n^v و a_n^h مشتق گرفت و نتیجه را برابر با صفر قرار داد. در این حالت، دستگاه معادله بدین شکل به دست خواهد آمد:

رابطه (۱۳-ث)

$$a_n^v\left(\kappa_n^2 c_n+B_n^v\sigma_{v,n}^2\right)+a_n^h\kappa_n^2 c_n=\kappa_n c_n$$
$$a_n^v\kappa_n^2 c_n+a_n^h\left(\kappa_n^2 c_n+B_n^h\sigma_{h,n}^2\right)=\kappa_n c_n$$

ضرایب تلفیقی a_n^v و a_n^h در برآورد ناریب نوسان پتانسیل به‌وسیله رابطه (۱۲) چنین‌اند:

$$a_n^v=\frac{\left(B_n^h\right)^2\sigma_{h,n}^2}{\kappa_n\left(\left(B_n^v\right)^2\sigma_{v,n}^2+\left(B_n^h\right)^2\sigma_{h,n}^2\right)}$$

و

$$a_n^h=\frac{\left(B_n^v\right)^2\sigma_{v,n}^2}{\kappa_n\left(\left(B_n^v\right)^2\sigma_{v,n}^2+\left(B_n^h\right)^2\sigma_{h,n}^2\right)}$$

برهان. اریبی برآوردگر به‌خاطر وجود جمله نخست در رابطه (۱۳-ب) است. چنانچه هدف به‌دست آوردن برآوردی ناریب باشد، باید شرایطی را در مسئله در نظر گرفت تا اریبی مسئله حذف شود. به این منظور می‌توان این شرط را در محاسبه ضرایب تلفیقی در نظر گرفت:

رابطه (۱۴-الف)

$$a_n^v\kappa_n+a_n^h\kappa_n-1=\circ$$

پس از به دست آوردن ضریب a_n^v از رابطه (۱۴-الف) و جای‌گذاری آن در رابطه (۱۳-ب) خواهیم داشت:

رابطه (۱۴-ب)

$$E\left\{\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}\left(\delta T\left(P_{\circ}\right)\right)^{2}d\sigma\right\}=$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\kappa_n^{-2}\left(1-a_n^h\kappa_n\right)^2\left(B_n^v\right)^2\sigma_{v,n}^2$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n^h B_n^h\right)^2\sigma_{h,n}^2$$

پس از مشتق‌گیری از رابطه (۱۴-ب) نسبت به a_n^h و برابر قرار دادن نتیجه با صفر و ساده‌سازی ضریب a_n^h به دست خواهد آمد. به همین ترتیب، پس از جای‌گذاری این ضریب در رابطه (۱۴-الف) و پس از ساده‌سازی ضریب a_n^v نیز به‌دست خواهد آمد.

بنابراین، برآورد نوسان پتانسیل در سطح کره R بدین شکل خواهد بود:

رابطه (۱۴-پ)

$$\tilde{T}\left(P_0\right)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)a_n^v B_n^v P_n\left(\cos\psi\right)T_z\left(Q\right)d\Omega+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)a_n^h B_n^h P_{n1}\left(\cos\psi\right)$$
$$\left(-T_x\left(Q\right)\cos\alpha+T_y\left(Q\right)\sin\alpha\right)d\Omega$$

برآوردگر (۱۴-ب) از داده‌های گرانی‌سنجی برداری در فاصله ژئوسنتریک r انتگرال می‌گیرد و ضمن تلفیق تمامی داده‌ها، آنها را ادامه فروسو به نوسان پتانسیل در سطح ژئوئید می‌دهد. نکته‌ای که باید در برآورد ناریب

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

و اریب نوسان پتانسیل در نظر گرفته شود، این است که فقط در برآورد اریب خاصیت هموارسازی و یا رگولاریزاسیون[1] وجود دارد و کرنل‌ها هم‌گرا هستند. برآورد ناریب ضرایب تلفیقی منجر به واگرا شدن کرنل‌ها شده و امکان انتگرال‌گیری و ادامه فروسودهندگی را نخواهد داشت. اما چنانچه داده‌های گرانی پیش از تلفیق طیفی ادامه فروسو داده شوند، برآورد ناریب نیز در این قضیه کارآمد خواهد بود. ولی برای تلفیق طیفی و ادامه فروسوی همزمان داده‌ها از فاصله ژئوسنتریک r حتماً می‌بایست از برآوردگر اریب استفاده کرد.

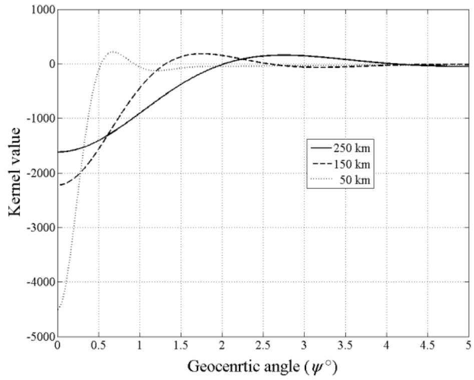
۴- محاسبات عددی

در این بخش، محاسبات عددی ساده برای کرنل‌های به‌دست آمده، انجام می‌گیرد. بدین منظور مدل ژئوپتانسیل ای‌جی‌ام ۲۰۰۸[۳۳] به عنوان میدان گرانشی زمین فرض می‌گردد و از آن برای تولید طیف‌های میدان گرانشی تا درجه ۲۱۶۰ و برای درجات بالاتر از مدل شرنینگ ـ رپ [۳۴] استفاده خواهد شد. مدل شوبرگ [۳۵] برای تولید طیف خطای داده‌های گرانی با فاصله همبستگی $0/1^\circ$ به‌کار گرفته خواهد شد. در محاسبات و نمایش رفتار کرنل‌ها، خطاها و شکل طیف‌های تلفیقی به ترتیب خطای ۳ میلی‌گال و ۶ میلی‌گال برای T_v و T_h در نظر گرفته می‌شود. کلیه محاسبات برای ارتفاعات ۲۵۰، ۱۵۰ و ۵۰ کیلومتر انجام می‌گیرند و کرنل‌ها تا درجه ۳۰,۰۰۰ محاسبه می‌شوند.

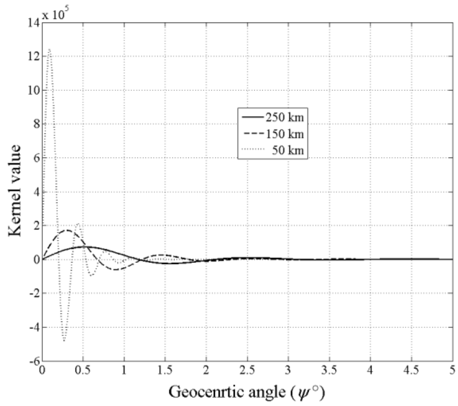
محاسبات عددی این بخش در دو مرحله ارائه می‌گردد. ابتدا ضرایب تلفیقی براساس قضیه ۱ برای هر انتگرال جداگانه محاسبه و ارائه می‌گردد. در بخش دوم ضرایب تلفیقی در ترکیب دو انتگرال مطابق با قضیه ۲ به‌دست می‌آیند و کرنل‌ها و خطاها بررسی می‌شوند.

۴-۱- ادامه فروسو در هر انتگرال

در این قسمت ضرایب ادامه فروسودهنده (ارائه شده در قضیه ۱) برای برآوردگرهای انتگرالی (۱۱-الف) و (۱۱-ب) در ارتفاعات ۲۵۰، ۱۵۰ و ۵۰ کیلومتر برآورد می‌شوند. پس از جای‌گذاری مقادیر برآورد شده در روابط مورد نظر کرنل‌ها به صورت آنچه که در شکل ۱ ارائه شده‌اند، به‌دست می‌آیند.



(الف)



(ب)

شکل ۱. (الف) کرنل انتگرال (۱۱-ت)؛ و (ب) کرنل انتگرال (۱۱-ث) در ارتفاعات ۲۵۰ و ۱۵۰ و ۵۰ کیلومتر (محور افقی زاویه ژئوسنتریک[2] برحسب درجه و محور قائم مقدار کرنل است).

همان‌طور که شکل ۱ نشان می‌دهد، کرنل‌های واگرای برآوردگرهای انتگرالی نه‌تنها واگرا نیستند بلکه

1. Regularization
2. Geocentric angle

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

تا حدی اصلاح نیز شده‌اند؛ یعنی دیگر داده‌های در مناطق دور[1] برای انتگرال‌گیری لازم نیستند. در شکل ۱، هر دو کرنل تا زاویه ژئوسنتریک ۵ درجه ترسیم شده‌اند و به خوبی نشان می‌دهند که داده‌های دوردست در انتگرال‌گیری نقش چندانی ندارند و کرنل‌ها بعد از حدود ۵ درجه به سمت صفر میل می‌کنند. شکل ۱-الف کرنل برآورد انتگرالی (۱۱-ت) را در ارتفاعات مختلف نشان می‌دهد. کرنل‌ها تموج و نوسان چندانی، تا پیش از میل کردن به سوی صفر ندارند. به عبارت دیگر، کرنل‌ها نرم‌اند. همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، در ارتفاع ۲۵۰ کیلومتری کرنل در زاویه ژئوسنتریک بیشتر از دیگر ارتفاعات به سمت صفر میل می‌کند. این بدان معناست که در ارتفاعات بالاتر نقش داده‌های دوردست، تعیین‌کننده‌تر از وقتی است که ارتفاع کمتر باشد. این قضیه همچنان با توجه به مقدار کرنل در نقطه محاسباتی ـ یا به عبارت دیگر، وقتی زاویه ژئوسنتریک صفر است ـ به خوبی مشاهده می‌گردد. در ارتفاعات کمتر، مقدار کرنل در نقطه محاسباتی بیشتر است و این قضیه به خوبی نشان‌دهنده این است که در ارتفاعات کمتر کرنل‌ها محلی‌ترند و در فاصله ژئوسنتریک کمتری در قیاس با دیگر کرنل‌های در ارتفاعات بالاتر به سمت صفر میل می‌کنند. شکل ۱-ب کرنل برآوردگر (۱۱-ث) را نشان می‌دهد. کلیه توضیحات بیان شده در تفسیر کرنل انتگرال (۱۱-ت) برای این کرنل نیز صادق است، با این تفاوت که کرنل از نوع کرنل‌های زنگوله‌ای است [۳۶]. اگرچه مقدار کرنل در نقطه محاسبه صفر است، اما همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، نقاط نزدیک نقطه محاسباتی، نقشی بیشتر از نقاط دور دارند. با توجه به شکل هر دو کرنل، می‌توان نتیجه گرفت که با استفاده از آنها می‌شود میدان گرانشی و ژئوئید را مستقیماً از داده‌های گرانی‌سنجی برداری در ارتفاعات مختلف به‌دست آورد.

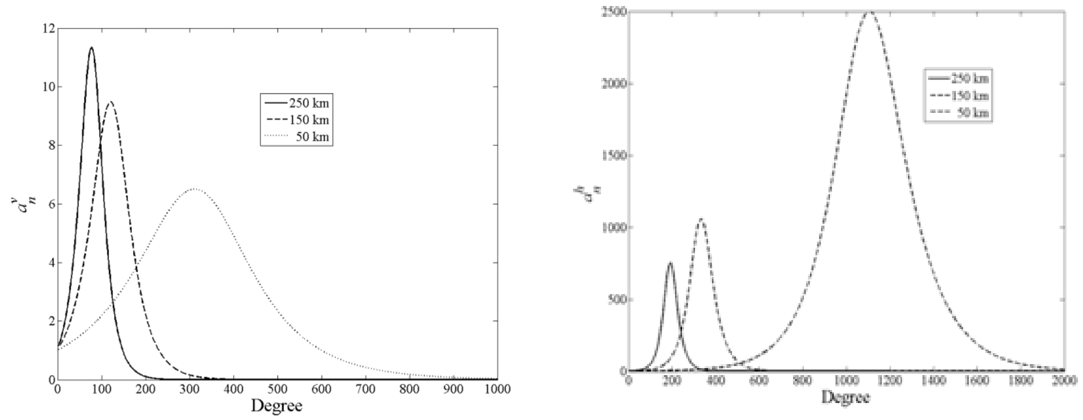
شکل ۲-الف و ۲-ب، ضرایب a_n^v و a_n^h را در برآوردگرهای (۱۱-ت) و (۱۱-ث) نشان می‌دهند. این ضرایب به نوعی اعمال‌کنندهٔ خاصیت ادامه فروسودهندگی در انتگرال‌ها هستند. همان‌طور که شکل ۲-الف نشان می‌دهد، وقتی که انتگرال‌گیری در ارتفاع ۲۵۰ کیلومتری انجام می‌شود، مقدار بیشینهٔ این ضرایب در حدود درجه ۱۰۰ انتخاب می‌شود و این درجه بیشینه در ارتفاعات ۱۵۰ و ۵ کیلومتری به ترتیب بین ۱۰۰ و ۲۰۰ و حدود ۳۰۰ است. علت به‌وجود آمدن چنین بیشینه‌هایی در ضرایب تلفیقی به‌خاطر خاصیت ادامه فروسودهندگی اعمال‌شده به آنهاست. به عنوان مثال، در شکل ۲-الف و در ارتفاع ۲۵۰ کیلومتری، این ضریب از مقداری کمتر از ۲ شروع به رشد می‌کند و این موضوع تقریباً تا درجه ۱۰۰ ادامه می‌یابد. در حقیقت این ضریب، اندک اندک بسامدهای پایین در داده‌ها را تقویت می‌کند. وقتی ارتفاع انتگرال‌گیری کمتر شود، این ضرایب شروع به تقویت بسامدهای بالاتری برای بازیابی میدان گرانشی از داده‌ها می‌کنند؛ یا به عبارت دیگر، بسامدهای بالاتری از داده‌ها را در بازیابی داده‌ها در نظر می‌گیرند. شکل ۲-ب به‌گونه‌ای مشابه با ۲- الف تفسیرشدنی است، اما با این تفاوت که مقدار بیشینه ضرایب در ارتفاع بالاتر کمتر از بیشینه در ارتفاع پایین‌تر است. نکته درخور تأمل این است که با توجه به شکل ۲-ب، توانایی ضریب a_n^h برای بازیابی بسامدهای بالای میدان گرانشی، بیشتر از a_n^v است و احتمالاً کیفیت بهتری را در نتایج به‌دست آمده، می‌توان از آن انتظار داشت.

شکل ۳- الف و ۳-ب خطای برآوردگرهای انتگرالی (۱۱-ت) و (۱۱-ث) محاسبه‌شده از رابطه (۱۱-ب) را در درجات مختلف نشان می‌دهند. به منظور تبدیل واحد خطا به متر، آن واحد به مقدار میانگین شتاب گرانش تقسیم شده است. انتظار این است که همواره خطا در بسامدهای بالا، کمتر از خطا در بسامدهای پایین باشد ـ اما هر دو شکل خلاف این قضیه را نشان می‌دهند. این قضیه به‌خاطر وجود پدیده

1. Far-zone data

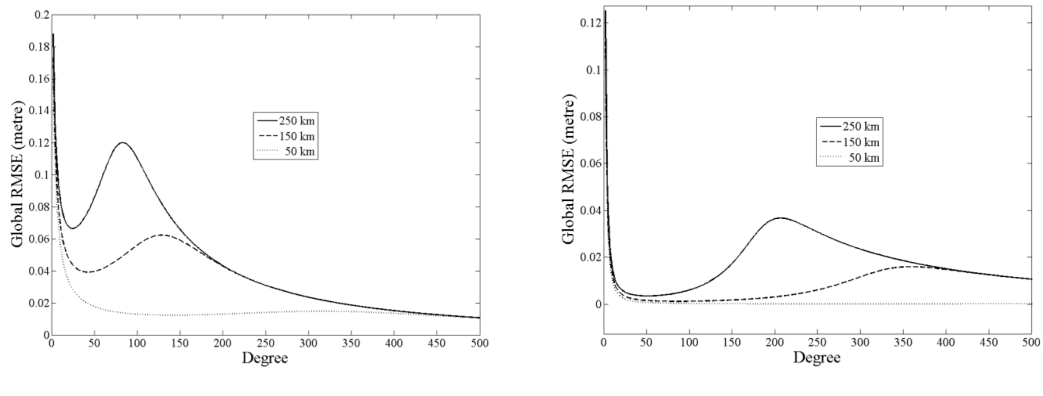
[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

ادامه فروسودهندگی در ضرایب است. زمانی که فـاکتور ادامه فروسودهنده شروع بـه تقویـب بسـامدهای پـایین می‌کند و تا درجه خاصی، خطا را تا بیشینهٔ ممکن رشد می‌دهد. طبیعی است که وقتی ارتفاع بیشتر باشد، ایـن ضریب با شدت بیشتری عمل می‌کند تا بتواند داده‌ها را ادامه فروسو دهد؛ و وقتی ارتفاع کاهش یابـد، از شـدت تقویت این ضریب نیز کاسته می‌شود. همان‌طور کـه در هر دو شـکل مـی‌تـوان دیـد، وقتـی ارتفـاع حـدود ۵۰ کیلومتر باشـد، ایـن تقویـت خطـا نامحسـوس اسـت و طبیعتاً در نزدیک سطح زمـین، بـه طـور کلـی تـأثیری نخواهد داشت.



(الف) (ب)

شکل ۲. (الف) ضریب تلفیقی a_n^v؛ و (ب) ضریب تلفیقی a_n^h در ارتفاعات ۲۵۰ و ۱۵۰ و ۵۰ کیلومتر



(الف) (ب)

شکل ۳. خطای (الف) برآوردگر (۱۱-ت) با k=V؛ و (ب) برآوردگر (۱۱-ث) با k=h در ارتفاعات ۲۵۰ و ۱۵۰ و ۵۰ کیلومتر

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

۴-۲- تلفیق طیفی و ادامه فروسو در هر دو انتگرال

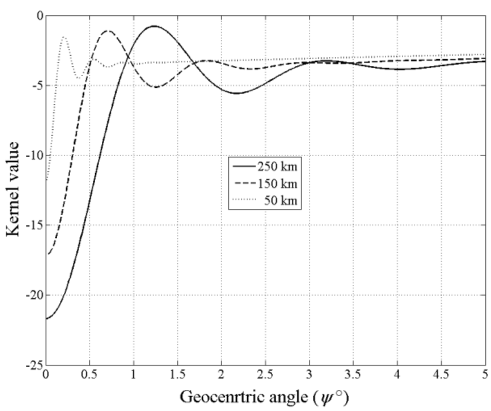
در این قسمت از مقاله، ابتدا رفتار کرنل‌های برآوردگر انتگرالی (۱۴-پ) بررسی می‌گردند. شکل‌های ۴-الف و ۴-ب رفتار این کرنل‌ها را در ارتفاعات مختلف نشان می‌دهند.

رفتار کرنل‌ها مشابه با رفتار کرنل‌های حالتی است که تک‌تک انتگرال‌ها ادامه فروسو داده می‌شوند (ن.ک. شکل ۱). با کاهش ارتفاع همچنان کرنل‌ها محلی‌تر می‌شوند و نقش داده‌های دوردست هر دم کمتر می‌گردد؛ و برعکس، با افزایش ارتفاع نقش داده‌های دوردست افزایش می‌یابد.

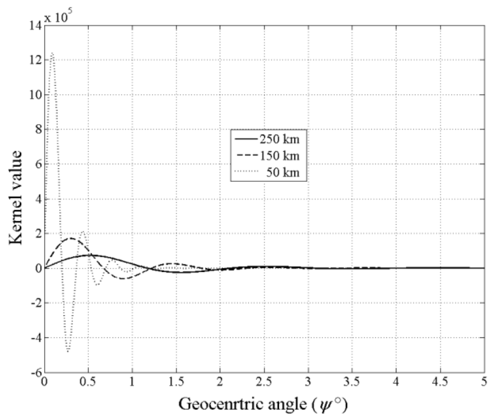
آنچه که باید مورد توجه قرار گیرد، مقدار کرنل ارائه شده در شکل ۴- الف است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، مقدار این کرنل در زاویه ژئوسنتریک ۵ درجه به سمت صفر میل نخواهد کرد. چه‌بسا کسی ادعا کند که این روش تلفیق دو انتگرال، روش خوبی برای ادامه فروسوی داده‌های گرانی‌سنجی برداری نیست، چون مهم‌ترین داده گرانی‌سنجی برداری ـ که مشتق شعاعی میدان گرانشی است ـ نیاز به داده‌های دوردست دارد.

اما چنین موضوعی نمی‌تواند صحت داشته باشد، زیرا با توجه به مقدار کرنل می‌توان دریافت که مقدار کرنل در زوایای ژئوسنتریک مختلف بسیار کوچک است. به عنوان مثال، می‌توان آن را با شکل ۱-الف مقایسه کرد. همان‌طور که از پیش‌تر نیز بیان شد، از بُعدِ نظری نقش داده‌های گرانی‌سنجی برداری افقی به‌خاطر شکل خاص کرنل، بیشتر است. به همین دلیل در برآوردگر (۱۴-پ) ضرایب تلفیقی a_n^v و a_n^h به ترتیب به داده‌های T_v، وزنی کمتر از T_h می‌دهد. بنابراین نقش انتگرال دوم رابطه (۱۴-پ) بیشتر از انتگرال نخست آن خواهد بود.

از سوی دیگر، نمی‌توان مطمئن بود که کرنل انتگرال دوم نیز در حدود زاویه ژئوسنتریک ۵ درجه به سمت صفر میل می‌کند؛ چون مقدار کرنل در زوایای ژئوسنتریک کوچک‌تر، بسیار بزرگ است. در نمایش گرافیکی، این کرنل منطبق بر صفر دیده می‌شود، ولی در شکل ۴-الف چون مقدار کرنل در زوایای ژئوسنتریک کوچک‌تر چندان بزرگ نیست بنابراین کرنل منطبق بر صفر، در نمایش دیده نخواهد شد.



(الف)

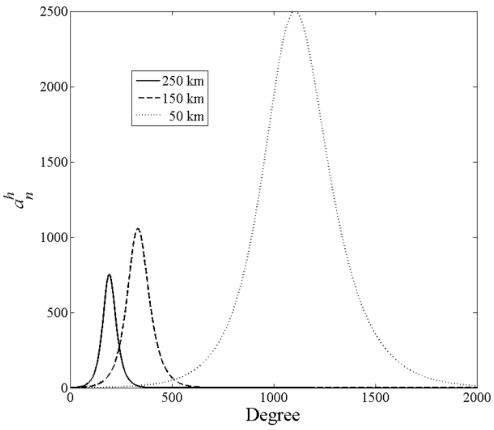


(ب)

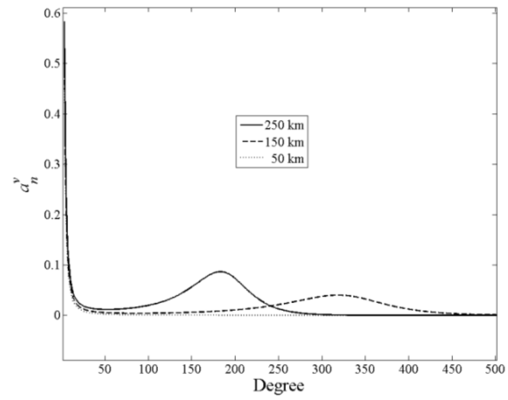
شکل ۴. (الف) کرنل انتگرال (۱۱-ت)؛ و (ب) کرنل انتگرال (۱۱-ث) در ارتفاعات ۲۵۰ و ۱۵۰ و ۵۰ کیلومتر

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

شکل‌های ۵-الف و ۵-ب ضرایب تلفیقی a_n^v و a_n^h را در ارتفاعات ۲۵۰، ۱۵۰ و ۵۰ کیلومتری برای برآوردگر انتگرالی (۱۱-پ) نشان می‌دهند.



(الف)

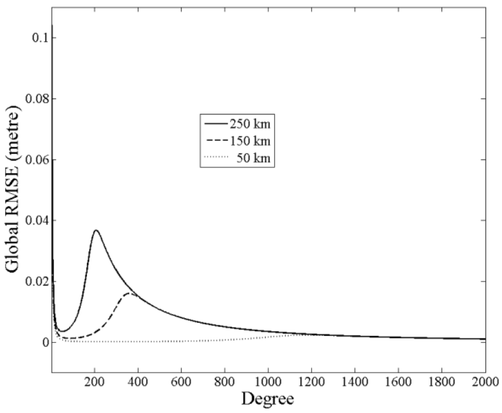


(ب)

شکل ۵. (الف) ضریب تلفیقی a_n^v؛ و (ب) ضریب تلفیقی a_n^h در ارتفاعات ۲۵۰ و ۱۵۰ و ۵۰ کیلومتر برای برآورد انتگرالی (۱۱-پ)

تعبیر هر دو شکل نیز همچنان مشابه تعبیر ارائه شده برای شکل ۲ است. شکل ۵-ب بسیار مشابه شکل ۲-ب است. با این تفاوت که در تلفیق طیفی دو انتگرال به‌دست آمده است. اما شکل ۵-الف نشان می‌دهد که a_n^v بسیار کوچک است و در مقایسه با آنچه که در شکل ۲-الف ارائه شده، ضعیف نیز هست ـ آن هم به‌خاطر وجود فاکتور $B_n^h = R/n(n+1)$. در مقایسه این فاکتور با $B_n^v = -R/(n+1)$، می‌توان دید که B_n^h در کم کردن قدرت فاکتور ادامه فروسوی κ_n^{-1} توانمندتر از B_n^v است. طبیعی است که در امر ادامه فروسوی و تلفیق طیفی داده‌های گرانی این ضریب، وزن داده‌های آن بخش از برآوردگر که با این ضریب درگیرند، بیشتر نیز خواهد بود.

شکل ۶ خطای برآوردگر (۱۴-پ) را برحسب متر نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل ۳ نیز مشخص است، این خطا هم در ارتفاعات کم، خاصیت تقویت بسامدهای بالای کمتری در مقایسه با ارتفاعات بالا دارد. جدول ۱ خطای برآوردگرهای (۱۱-ت)، (۱۱-ث) و (۱۴-پ) را در ارتفاعات مختلف نشان می‌دهد. این جدول مشخص می‌سازد که دقت برآوردگر (۱۴-پ) در حدود برآوردگر (۱۱-ث) است. هر دو در ارتفاع ۲۵۰ کیلومتری دارای ۴۸ سانتیمتر خطا در محاسبه ژئوئید، ۲۸ سانتیمتر در ارتفاع ۱۵۰ کیلومتر، و ۱۱ سانتیمتر در ارتفاع ۵۰ کیلومترند؛ در حالی‌که برآورد (۱۱-ت) خطاهای ۱۲۷ و ۸۷ و ۴۵ سانتیمتر در ژئوئید بازیابی‌شده دارد. علت اصلی اختلاف بین این دو برآورد، همانا تفاوت ساختاری B_n^h و B_n^v است؛ در حالی‌که در عمل کیفیت داده‌های گرانی از نوع T_x و T_y به خوبی T_z نیست.



شکل ۶. خطای برآوردگر (۱۴-پ) در ارتفاعات گوناگون (۲۵۰ و ۱۵۰ و ۵۰ کیلومتر)

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

جدول ۱. خطای برآوردگرهای (۱۱-ت)، (۱۱-ث) و (۱۴-پ) را در ارتفاعات مختلف برحسب متر

خطای برآوردگر (۱۴-پ)	خطای برآوردگر (۱۱-ث)	خطای برآوردگر (۱۱-ت)	ارتفاع (کیلومتر)
۰/۴۸	۰/۴۸	۱/۲۷	۲۵۰
۰/۲۸	۰/۲۸	۰/۸۷	۱۵۰
۰/۱۱	۰/۱۱	۰/۴۵	۵۰

به‌طور کلی باید ذکر کرد که برآوردگرهای ترکیبی، همان‌گونه که انتظار می‌رود، خطای‌شان کمتر از برآوردگرهای غیرترکیبی است. از نظر آماری برآوردگری که خطای کمتری داشته باشد، دارای توانایی بیشتری در برآورد نوسان پتانسیل است و یا به عبارت دیگر، برآورد آن احتمالاً به واقعیت نزدیکتر است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مطالعه از هم‌سازهای کروی برداری مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی برداری استفاده شد و دو حل انتگرالی برای مسئله مقدار مرزی ارائه گردید. کرنل‌های این دو انتگرال کاملاً واگرا هستند، و عملی و کاربردی نیستند. لیکن در این مقاله با استفاده از نویز تقریبی داده‌های گرانی، به روش آماری تلفیق طیفی، کرنل این دو انتگرال هم‌گرا شدند، اما باید توجه داشت که چون کلیه فرمول‌ها در دامنه طیفی‌اند، امکان یافتن فرم بسته[1] برای آنها وجود ندارد ـ و یا کار ساده‌ای نیست.

ضرایب تلفیق طیفی، ساختار بسیار مشابهی با روش هموارسازی تیخانوف[2] در حل مسائل بدوضع دارد. چنانچه داده‌ها نیازی به ادامه فروسو نداشته باشند، ضرایب تلفیق طیفی به صورت صافی وینر عمل خواهند کرد. در حقیقت ضرایب تلفیق طیفی فرم کلی‌تری از روش تیخانوف و صافی وینر است.

برآوردگرهایی برای ترکیب دو حل انتگرالی ارائه شد و به دو صورت اریب و نااریب تلفیق طیفی گردید و نشان داده شد که روش نااریب محاسبه ضرایب تلفیق طیفی منجر به کرنل‌های واگرا می‌شود. بنابراین چنانچه یکی از اهداف تلفیق طیفی ادامه فروسو باشد، باید حتماً از روش اریب ضرایب تلفیقی را به‌دست آورد. اما هر دو ضریب اریب و نااریب، در مسائلی که نیاز به ادامه فروسو ندارند ـ و یا ادامه فروسو قبل از تلفیق طیفی انجام شده است ـ به‌راحتی استفاده‌شدنی است.

محاسبات عددی نشان از آن دارند که کرنل‌های همگراشده به‌وسیله ضرایب تلفیق اصلاح می‌گردند؛ یعنی سهم داده‌های دوردست در انتگرال‌گیری نیز کاسته می‌شود. همچنین با کاهش ارتفاع، کرنل‌های محلی‌تر و در زاویه ژئوسنتریک کمتری به صفر می‌رسند. محاسبات عددی نیز نشان از آن دارند که برآوردگرهای ترکیبی با خطای کمتری در قیاس با برآوردگرهای غیرترکیبی همراه‌اند و توانایی بیشتری در برآورد نوسان پتانسیل نزدیک به واقعیت دارند.

۶- سپاس‌گزاری و قدردانی

نویسنده از سازمان فضایی سوئد به‌خاطر حمایت‌های مالی پروژه (شماره ۹۸:۰۹:۰۱) نهایت قدردانی و سپاس را می‌گزارد. افزون بر اینها، از زحمات دوستان و همکاران آقای دکتر محمد باقربندی و

1. Closed form
2. Tikhonov

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

آقـای مهنـدس ماکـان عبـدالله‌زاده کـه نویســنده را در بازنگری مقاله یاری کرده‌اند، قدردانی می‌شود.

۷- منابع

[1] Bastos L., Cunha S., Forsberg R., Olesen A., Gidskehaugj A., Timmen L. and Meyer U., 2000. On the use of Airborne Gravimetry in Gravity Field Modelling: Experiences from the AGMASCO Project. *Physics and Chemis try of the Earth (A)*, 25 (1), l-7.

[2] Featherstone W., Dentith M. and Kirby J.F., 2000. The Determination and Application of Vector Gravity Anomalie. *Exploration Geophysics*, 31, 109-113.

[3] Jekeli C., 2001. *Inertial Navigation Systems with Geodetic Application*, Berlin, New York: Walter de Gruyter .

[4] Jekeli C. and Kwon J. H., 2002. Geoid Profile Determination by Direct Integration of GPS Inertial Navigation System Vector Gravimetry. *Journal of Geophysical Researches*, 107(B10), 2217.

[5] Li X., 2007. *Moving base INS&GPS Vector Gravimetry on a Land Vehicle.* Report 486, Department of Geodetic Science, Ohio State University Columbus.

[6] Serpas J.G. and Jekeli C., 2005. Local Geoid Determination from Airborne Vector Gravimetry. *Journal of Geodesy*, 78, 577–587.

[7] Van Gelderen M., 1991. *The Geodetic Boundary Value Problem in Two Dimensions and Its Iterative Solution*, Reports in Geodesy, No. 35, The Delft University of Technology, The Netherlands.

[8] Van Gelderen M. and Rummel R., 2001. The Solution of the General Boundary Value Problem by Least-squares. *Journal of Geodesy*, 75, 1-11.

[9] Van Gelderen M. and Rummel R., 2002. Corrections to ‘‘The Solution of the General Geodetic Boundary Value Problem by Least Squares”. *Journal of Geodesy*, 76, 121–122.

[10] Martinec Z., 2003. Green’s Function Solution to Spherical Gradiometric Boundary-value Problems, *Journal of Geodesy*, 77, 41-49.

[11] Bölling K. and Grafarend E., 2005. Ellipsoidal Spectral Properties of the Earth's Gravitational Potential and its First and Second Derivatives. *Journal of Geodesy*, 79: 300-330.

[12] Bjerhammar A., 1983. A Stochastic Approach to the Mixed Boundary Value Problem. In: *k.p. Schwarz and G.Lachapelle, eds. Physical Geodesy*. Geodesy in transition, A volume dedicated to Helmut Moritz on the occasion of his 50th birthday. Division of Surveying engineering, The University of Calgary, Canada, 25-42.

[13] Eshagh M., 2010. Optimal Combination of Integral Solutions of Gradiometric Boundary Value Problem using Variance Component Estimation in the Earth Gravitational Modelling. *Earth, Planets and Space*, 62(5), 437-448.

[14] Sjöberg L.E., 1980. Least-squares Combination of Satellite Harmonics and Integral Formulas in Physical Geodesy. *Gerlands Beitr*. Geophysik, Leipzig, 89(5), 371-377.

[15] Sjöberg L.E., 1981. Least-squares Combination of Terrestrial and Satellite Data in Physical Geodesy. *Ann, Geophys*, 37, 25-30.

[16] Wenzel H.G., 1981. Zur Geoidbestimmung Durch Kombination Von Schwereanomalien und Einem Kugelfuncationsmodell mit Hilfe von Integralformeln. *ZfV*. 106 (3) 102-111.

[17] Sjöberg L.E., 1984. Least-Squares Modification of Stokes’ and Vening-Meinez’ Formula by Accounting for Truncation and Potential Coefficients Errors. *Manuscripta Geodaetica*, 9, 209-229.

[18] Sjöberg L.E., 1984. Least-squares Modification of Stokes’ and Vening Meinesz’ Formulas by Accounting for Errors of Truncation. *Potential coefficients and gravity data*, Report No. 27, Department of Geodesy, Uppsala.

[19] Sjöberg L.E., 1991. Refined Least-squares Modification of Stokes’ Formula. *Manuscripta Geodaetica*, 16, 367-375.

[20] Sjöberg L.E., 2003. A General Model for Modifying Stokes’ Formula and its Least-

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

Squares Solution, *Journal of Geodesy*, 77, 459–464.

[21] Ågren J., 2004. *Regional Geoid Determination Methods for the Era of Satellite Gravimetry, Numerical Investigations using Synthetic Earth Gravity Models*. Ph.D. thesis in Geodesy, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.

[22] Ellmann A., 2004. *The Geoid for the Baltic Countries Determined by the Least Squares Modification of Stokes' Formula*. Ph.D. thesis in Geodesy, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.

[23] Kiamehr R., 2006. *Precise Gravimetric Geoid Model for Iran based on GRACE and SRTM Data and the Least-squares Modification of Stokes' Formula with Some Geodynamic Interpretations*.Ph.D. thesis in Geodesy, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.

[24] Daras I., 2008. *Determination of a Gravimetric Geoid Model of Greece using the Method of KTH*. M.Sc. Thesis in Geodesy and Geoinformatics Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.

[25] Abdallah A., 2009. *Determination of a Gravimetric Geoid Model of Sudan using the KTH Method*. M.Sc. Thesis in Geodesy and Geoinformatics Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.

[26] Eshagh M., 2010. Least-squares Modification of Extended Stokes' formula and its Second-Order Radial Derivative for Validation of Satellite Gravity Gradiometry Data. *Journal of Geodynamics*, 49, 92-104.

[27] Eshagh M., 2011. Semi-stochastic Modification of Second-order Radial Derivative of Abel-Poisson's Formula for Validating Satellite Gravity Gradiometry Data. *Advances in Space Research*, 47, 757-767.

[28] Tscherning C.C., Forsberg R. and Vermeer M., 1990. *Methods for Regional Gravity Field Modelling from SST and SGG Data.* Reports of the Finnish Geodetic Institute, Helsinki No. 90: 2.

[29] Eshagh M., 2011. On Integral Approach to Regional Gravity Field Modelling from Satellite Gradiometric Data. *Acta Geophysica*, 59(1), 29-54.

[30] Eshagh M., 2008. Non-singular Expressions for Vector and Gradient Tensor of Gravitation in a Geocentric Spherical Frame. *Computers & Geosciences*, 32, 1762-1768.

[31] Heiskanen W. and Moritz H., 1967. *Physical Geodesy.* San Francisco and London: W.H. Freeman and company.

[32] Sjöberg L.E. and Eshagh M., 2009. A Geoid Solution for Airborne Gravity Data. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 53, 359-374.

[33] Pavlis N., Holmes SA., Kenyon SC. and Factor JK., 2008. An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM08. *In the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria*.

[34] Tscherning C.C. and Rapp R., 1974. *Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations and Deflections of Vertical Implied by Anomaly Degree Variance Models*. Rep. 355. Dept. Geod. Sci. Ohio State University, Columbus, USA.

[35] Sjöberg L.E., 1986. Comparisons of some Methods of Modifying Stokes' Formula. *Boll. Geod. Sci. Aff.*, 3, 229-248.

[36] Eshagh M., 2011. The Effect of Spatial Truncation Error on Integral Inversion of Satellite Gravity Gradiometry Data. *Advances in Space Research*, 47, 1238-1247.

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]

K. N. TOOSI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF GEODESY AND GEOMATICS ENGINEERING

Journal of Geospatial Information Technology
Vol.1, No.2, Winter 2014
33-50

Spectral Combination in Vector Gravimetric Boundary Value Problems

Eshagh M.*

Associate Prof., Division of Geodesy and Geoinformatics, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden

Abstract

If there are more than a unique type of boundary value problem, so there may not be just one solution for problem. The vector gravimetric boundary value problem is one of the types of such problems which include two integral solutions. In this paper, this problem is solved in spectral domain, and then the solutions will be converted to integrals in spatial domain. The kernels of these integrals are divergent but by using spectral combination they become convergent and even they will have the downward continuation property. To do so, different stochastic estimators for recovering the disturbing potential at sea level are presented, and for each one of them the spectral coefficients are derived. Numerical computations show that the convergent kernels have the property of modifying the integral formulas in addition to the downward continuation and Wiener filtering, so that the kernels are well-behaved and reduce the contributions of far-zone data easily. The method presented in this paper can be applied for combination of satellite or air-borne vector gravimetric data.

Keywords: Spherical harmonics, Vector field, Orthogonality property, Convergence, Biased and unbiased estimators.

* Correspondence Address: Division of Geodesy and Geoinformatics, Teknikringen72, Royal Institute of Technology (KTH), SE 10044, Stockholm, Sweden. Tel: +4687907369
Email: eshagh @ Kth.se

[DOI: 10.29252/jgit.1.2.33]