نشریه علمی پژوهشی مهندسی فناوری اطلاعات مکانی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی نقشه برداری

سال چهارم، شماره سوم، پاییز ۱۳۹۵
Vol.4, No.3, Autumn 2016
۱۰۷-۱۱۹

این مقاله در اولین کنفرانس ملی مهندسی فناوری اطلاعات مکانی به‌عنوان مقاله برگزیده انتخاب شده است که پس از تکمیل، داوری مجدد و اخذ پذیرش در این شماره از نشریه به چاپ می‌رسد.

مدل‌سازی محلی میدان ثقل از طریق توابع پایه شعاعی و الگوریتم لونبرگ-مارکواردت بهبود یافته

محبوبه محمدیوسفی بهلولی احمدی[1*]، عبدالرضا صفری[2]، آناهیتا شهبازی[3]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران
۲- دانشیار دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران
۳- کارشناس ارشد ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۱/۲۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۴/۳۰

چکیده

مدل‌سازی میدان ثقل به صورت جهانی و محلی و با به کارگیری داده‌های ارتفاع سنجی ماهواره‌ای، هوابرد، زمینی و یا ترکیبی از مجموعه این داده‌ها صورت می‌گیرد. یکی از روش‌های مرسوم برای تقریب میدان ثقل، استفاده از بسط توابع هارمونیک کروی است. به دلیل مشخصه‌های جهانی توابع پایه هارمونیک کروی، تغییرات محلی کوچک منجر به تغییر در تمام ضرایب این توابع می‌شود و لذا این توابع برای مدل‌سازی‌های محلی مناسب نیستند. برای حل این مشکل، گروه‌های مختلفی از توابع پایه وجود دارد که از آن جمله می‌توان به توابع پایه شعاعی اشاره کرد. در مدل‌سازی میدان ثقل با استفاده از توابع پایه شعاعی، آنومالی پتانسیل ثقل به صورت ترکیبی خطی از تعدادی متناهی تابع پایه شعاعی نوشته می‌شود و بنابراین هر تابعک خطی از آنومالی پتانسیل نظیر آنومالی جاذبه یا نوسان جاذبه نیز می‌تواند بر اساس توابع پایه شعاعی بیان شود. بدین ترتیب، کمیت‌های قابل اندازه‌گیری میدان ثقل زمین می‌توانند به‌منظور تعیین پارامترهای توابع پایه شعاعی در مدل‌سازی میدان ثقل به کار روند. در این تحقیق، سیستم معادلات مشاهداتی با استفاده از کرنل دو قطبی شعاعی و داده‌های آنومالی جاذبه هوای آزاد تشکیل شده و مقادیر پارامترهای مجهول مسئله شامل تعداد، مکان، عمق (یا پهنای باند) و ضرایب مقیاس این توابع پایه به روش کمترین مربعات به دست می‌آیند. در واقع از الگوریتم لونبرگ- مارکواردت به عنوان یک روش پایدارسازی غیرخطی برای یافتن پارامترهای توابع پایه شعاعی به صورت هم‌زمان استفاده می‌شود. به منظور افزایش کارایی عددی این الگوریتم، روشی جدید برای تعیین مقدار اولیه پارامتر پایدارسازی و به هنگام‌سازی آن ارائه می‌شود. در نهایت، نتایج عددی حاصل از الگوریتم لونبرگ-مارکواردت بهبود یافته با حالت ساده آن مقایسه می‌شود. با اعمال تغییرات پیشنهاد شده در این الگوریتم، مجهولات مسئله در مدت زمان بسیار کوتاه و با تعداد تکرارهای کم به دست می‌آیند. علاوه بر این، اعمال این تغییرات می‌تواند احتمال همگرایی جواب حاصل از این روش به جواب مینیمم مطلق را افزایش دهد.

کلیدواژه‌ها: توابع پایه شعاعی، کرنل چندقطبی شعاعی، مدل‌سازی محلی میدان ثقل، مسئله معکوس غیرخطی، الگوریتم لونبرگ-مارکواردت

*نویسنده مکاتبه کننده: دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، خیابان امیرآباد شمالی، تهران، ایران.
تلفن: ۰۹۱۵۹۸۴۸۷۲۲

Email : mmyusefi@ut.ac.i

۱- مقدمه

میدان ثقل زمین دارای کاربردهای ژئودتیکی و ژئوفیزیکی فراوانی است که از جمله مهم‌ترین کاربردهای آن می‌توان به تعیین ژئوئید اشاره کرد. از آنجایی که اندازه‌گیری مستقیم شتاب ثقل در تمام نقاط فضا امکان‌پذیر نبوده و همچنین این امر مستلزم صرف زمان و هزینه زیادی است، لذا ناگزیر به مدل‌سازی میدان ثقل زمین هستیم. مدل‌سازی در واقع به معنای بیان ریاضی یک پدیده فیزیکی به کمک توابع پایه مستقل می‌باشد. مدل‌سازی میدان ثقل زمین به دو صورت جهانی و محلی صورت می‌گیرد که هرکدام دارای کاربردهای خاص خود می‌باشند. مدل‌های محلی غالبا دقت بهتری را نسبت به مدل‌های جهانی در منطقه مورد نظر به دست می‌دهند و معمولا برای بررسی در مناطق محلی کاربرد دارند. مدل‌های جهانی برای بررسی در ابعاد وسیع‌تر مناسب هستند و همچنین ممکن است که به علت کمبود اطلاعات در مناطقی که اندازه‌گیری مستقیم شتاب ثقل به سادگی امکان‌پذیر نیست استفاده شوند، با این تفاوت که دقت کمتری نسبت به مدل‌های محلی خواهند داشت. از طرفی در مدل‌سازی محلی میدان ثقل لازم است که اثر جهانی میدان از روی مشاهدات برداشته شود.

روش سنتی مدل‌سازی میدان ثقل، استفاده از بسط هارمونیک‌های کروی به‌عنوان توابع پایه است اما توزیع غیر یکنواخت و کیفیت متفاوت داده‌ها، استفاده از این توابع را برای مدل‌سازی میدان ثقل مخصوصا به صورت محلی محدود می‌کند. این توابع بیشتر خاصیت جهانی میدان ثقل را نمایش می‌دهند؛ بدین معنی که برای نمایش فرکانس‌های پایین میدان ثقل مناسب هستند و کوچکترین تغییر در حوزه فرکانس، تغییرات بزرگی در ضرایب آنها ایجاد می‌کند. بنابراین در کاربردهای محلی به توابعی نیاز داریم که از خاصیت محلی‌سازی میدان ثقل برخوردار باشند. به هنگام مدل‌سازی به کمک داده‌های زمینی میدان ثقل، برقراری تناسب بین خاصیت محلی‌سازی در حوزه‌های مکان و فرکانس دشوار است. در چنین شرایطی می‌توان از گروهی از توابع پایه که به توابع پایه شعاعی کروی[1] (SRBF) معروف هستند استفاده نمود [۱].

توابع پایه شعاعی کروی دارای محمل شبه محلی[۲] هستند و ویژگی بارز آن‌ها این است که با فاصله گرفتن از مبدأ به سرعت کاهش می‌یابند و به همین دلیل برای مطالعات در مقیاس‌های محلی مناسب هستند [۲]. تاکنون در تحقیقات زیادی از توابع پایه شعاعی برای مدل‌سازی میدان ثقل استفاده شده است. کرنل جرم نقطه‌ای (هایکینن، ۱۹۸۱؛ ورمیر، ۱۹۸۲، ۱۹۸۳، ۱۹۸۴، ۱۹۸۵؛ بارتلمس، ۱۹۸۶، ۱۹۸۹؛ بارتلمس و دیتریخ، ۱۹۹۱)، چند قطبی‌های شعاعی (مارچنکو، ۱۹۹۸؛ مارچنکو و همکاران، ۲۰۰۱)، توابع بلکمن (اشمیت و همکاران، ۲۰۰۴؛ اشمیت و همکاران، ۲۰۰۵؛ اشمیت و همکاران، ۲۰۰۷)، ویولت پواسن (هولشنایدر و همکاران، ۲۰۰۳؛ چمبودات و همکاران، ۲۰۰۵؛ پنت و همکاران، ۲۰۰۶؛ کلیس و ویتور، ۲۰۰۷)، کرنل پواسن (کلیس و همکاران، ۲۰۰۸)، و توابع اسپیلاین کروی (فریدن و رویتر، ۱۹۸۳؛ فریدن و همکاران، ۱۹۹۷؛ فریدن و همکاران، ۱۹۹۸؛ کوشی و همکاران، ۱۹۹۸) از جمله توابع پایه شعاعی مورد استفاده در مدل‌سازی میدان ثقل هستند [۱].

به هنگام مدل‌سازی میدان ثقل زمین با استفاده از توابع پایه شعاعی لازم است که نوع کرنل، پارامترهای این توابع شامل موقعیت مراکز، عمق و ضرایب مقیاس آن‌ها و هم چنین تعداد توابع مورد نیاز در مدل‌سازی را تعیین کرد [۱]. آنتونی و همکاران (۲۰۰۸) با استفاده از الگوریتم غیرخطی لونبرگ-مارکواردت، پارامترهای توابع پایه شعاعی را

---
[1] Spherical radial basis function
[۲] Quasi-local support

طی یک پروسه تکراری به گونه‌ای انتخاب می‌کردند که آنومالی‌های جاذبه مدل‌سازی شده به صورت بهینه‌ای بر مشاهدات متناظرشان منطبق شوند [۳]. وایگلت و همکاران (۲۰۱۰) نیز از الگوریتم غیرخطی لونبرگ-مارکواردت برای برآورد هم‌زمان مراکز، عمق و ضرایب مقیاس توابع پایه شعاعی استفاده کردند و نشان دادند که با حل هم‌زمان این پارامترها، به تعداد توابع پایه کمتری نیاز است که در نتیجه آن می‌توان به یک سیستم معادلات پایدار و یک جواب پایدار دست یافت [۴]. صفری و همکاران (۲۰۱۴) نیز به طور مشابه از الگوریتم لونبرگ-مارکواردت برای برآورد هم‌زمان پارامترهای توابع پایه شعاعی استفاده کردند و تعداد این توابع پایه را به صورت تابعی از انحراف معیار مشاهدات آنومالی پتانسیل در نظر گرفتند و ادعا نمودند که مقدار مینیمم انحراف معیار به ازای مناسب‌ترین تعداد توابع پایه حاصل می‌شود [۵].

با توجه به اینکه تعیین مدل میدان ثقل زمین با استفاده از مشاهدات میدان ثقل به عنوان یک مسئله معکوس در ژئودزی شناخته می‌شود، حل نمودن این مسئله نیازمند استفاده از یک روش پایدارسازی است. هدف از این تحقیق بهینه‌سازی جواب مسئله معکوس مدل‌سازی محلی میدان ثقل بر حسب توابع پایه شعاعی است. بدین‌منظور لازم است که ابتدا سیستم معادلات مشاهداتی بر اساس تابعک‌های خطی میدان ثقل که در اینجا شامل مشاهدات آنومالی جاذبه هستند تشکیل شوند. رابطه بین مشاهدات آنومالی جاذبه و پارامترهای توابع پایه شعاعی یک رابطه غیرخطی است و بنابراین مجهولات توابع پایه شعاعی را می‌بایست با استفاده از یک روش پایدارسازی غیرخطی حل نمود. در این تحقیق به منظور دستیابی به مقادیر بهینه پارامترهای توابع پایه شعاعی در مدل‌سازی محلی میدان ثقل از الگوریتم پایدارسازی لونبرگ-مارکواردت استفاده شده است. روش حل مسئله بدین صورت است پس از تشکیل سیستم معادلات مشاهداتی، مقادیر اولیه مناسبی برای پارامترهای مجهول فراهم می‌شود.

در ادامه الگوریتم لونبرگ-مارکواردت تغییرات پارامترهای مجهول را به روش کمترین مربعات طی یک فرآیند تکراری محاسبه می‌کند. پس از یافتن مقادیر بهینه پارامترهای هریک از توابع پایه شعاعی به کار رفته در مدل‌سازی، مدل میدان ثقل در نقاط مشاهداتی محاسبه شده و بدین ترتیب امکان برآورد دقت و صحت این مدل فراهم می‌شود.

در این مطالعه به منظور افزایش کارایی عددی الگوریتم لونبرگ- مارکواردت در حل مسئله مدل‌سازی میدان ثقل، این الگوریتم را با ارائه رابطه‌ای برای تعیین مقدار اولیه پارامتر پایدارسازی و همچنین پیشنهاد روشی برای به‌هنگام‌سازی این پارامتر بهبود می‌دهیم که در بخش‌های بعدی به‌طور مفصل در مورد آن‌ها توضیح داده می‌شود. با اعمال تغییرات پیشنهاد شده بر الگوریتم غیرخطی، مجهولات مورد جستجو طی تعداد تکرارهای محدودی به دست می‌آیند که به موجب آن سرعت حل مسئله بهینه‌سازی افزایش چشمگیری خواهد داشت. مقایسه نتایج حاصل از الگوریتم لونبرگ-مارکواردت در دو حالت ساده و بهبود یافته آن گویای این مدعا است. علاوه بر این، با تعیین مقادیر اولیه مناسب برای پارامترهای مدل‌سازی، احتمال همگرایی جواب الگوریتم لونبرگ- مارکواردت به جواب مینیمم مطلق افزایش داده می‌شود.

این مقاله در ۵ بخش سازماندهی شده است. در بخش (۲) توابع پایه شعاعی تعریف شده و میدان ثقل زمین بر حسب توابع پایه شعاعی مطرح شده است. در بخش (۳) به الگوریتم پایدارسازی لونبرگ-مارکواردت به طور مفصل پرداخته شده و در ادامه این بخش، روش‌های پیشنهادی برای بهبود این الگوریتم به‌طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش (۴) به مدل‌سازی محلی میدان ثقل زمین با استفاده از کرنل دو قطبی شعاعی در منطقه فارس

ساحلی پرداخته شده است. در نهایت در بخش (۵) به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

۲- تعریف میدان ثقل زمین بر حسب توابع پایه شعاعی

پیش از بیان میدان ثقل زمین بر حسب توابع پایه شعاعی لازم است که این توابع به صورت تفصیلی شرح داده شوند. تابع پایه شعاعی کروی به صورت تابعی از فاصله کروی بین دو نقطه تعریف می‌شود [۶]. به منظور تعریف تابع پایه شعاعی، ابتدا کره مرجع σ_R با شعاع R به صورت زیر تعریف می‌شود [۷]:

رابطه (۱)

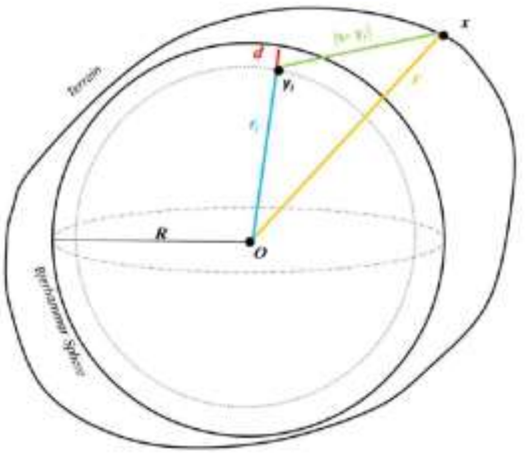
$$\sigma_R = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}$$

با در نظر گرفتن دو نقطه $x, y \in R^3, y \neq 0$ که x در فضای بیرون کره مرجع و y در فضای داخل این کره واقع شده‌اند، تابع پایه شعاعی به مرکز y نسبت به نقطه ارزیابی x از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود [۷]:

رابطه (۲)

$$\Psi_i(x, y_i) = \sum_{l=0}^{N} \psi_l \left(\frac{R}{|x|}\right)^{l+1} p_l(\hat{x}^T, y)$$

در رابطه(۲)، p_l بیانگر چند جمله‌ای‌های لژاندر از درجه l هستند. Ψ_i نیز نشان دهنده نوع کرنل توابع پایه است که ویژگی‌های طیفی و مکانی این توابع را مشخص می‌کند. به بیان دیگر، رفتار تابع پایه شعاعی در حوزه طیفی و مکانی به انتخاب کرنل تابع پایه و ضرایب لژاندر آن بستگی دارد. در این رابطه y_i مختصات سه بعدی تابع پایه شعاعی در سیستم مختصات کروی با موقعیت $(r_i, \varphi_i, \lambda_i)$ است. مختصات مسطحاتی توابع پایه شعاعی کروی (φ_i, λ_i)، مرکز تابع پایه نامیده می‌شود. همچنین به مختصات قائم این تابع (r_i) پهنای باند تابع پایه گفته می‌شود. پهنای باند توابع پایه شعاعی به‌صورت فاصله بین مرکز کرنل تابع پایه شعاعی و مرکز زمین تعریف می‌شود. علاوه بر این فاصله بین سطحی که توابع پایه شعاعی روی آن قرار گرفته‌اند و سطح کره مرجع که به‌صورت $d = R - r_i$ بیان می‌شود، به‌عنوان عمق این توابع پایه شعاعی در زیر کره بیرهامر شناخته می‌شود و هم ارز پهنای باند می‌باشد [۱]. در شکل (۱) ارتباط بین عمق، پهنای باند و شعاع کره بیرهامر نشان داده شده است [۸].



شکل ۱: وضعیت یک تابع پایه شعاعی در درون کره بیرهامر، x نقطه واقع بر سطح زمین، R شعاع کره بیرهامر، y_i موقعیت سه بعدی تابع پایه شعاعی، d عمق تابع پایه و r_i پهنای باند تابع پایه است [۸]

از آنجا که در این تحقیق از چند قطبی‌های شعاعی به منظور مدل‌سازی میدان ثقل استفاده شده است، تنها به شرح این کرنل‌ها پرداخته می‌شود. چندقطبی‌های شعاعی یکی از انواع توابع پایه شعاعی هستند که با مشتق‌گیری از کرنل جرم نقطه‌ای به دست می‌آیند. کرنل جرم نقطه‌ای ساده ترین نوع توابع پایه شعاعی است که رابطه تحلیلی آن به صورت معکوس فاصله بین دو نقطه تعریف می‌شود [۱]

رابطه (۳)

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{|x-y|}$$

شکل تحلیلی چند قطبی‌های شعاعی که نخستین بار توسط مارچنکو (۱۹۹۸) برای مدل‌سازی میدان ثقل زمین مورد استفاده قرار گرفت، به‌صورت زیر است [۱ و ۹]:

رابطه (۴)

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial |y|}\right)^m \frac{1}{|x-y|}$$

در رابطه (۴)، m مرتبه چند قطبی شعاعی را مشخص می‌کند. با توجه به رابطه فوق، شکل چندقطبی شعاعی تنها به عمق تابع و مرتبه آن بستگی دارد (برای جزییات بیشتر به [۱ و ۸] مراجعه شود).

آنومالی پتانسیل ثقل زمین در فضای خارج سطح زمین، یک تابع هارمونیک و منظم است که بر اساس قضیه رونگه-کراراپ می‌توان آن را بر حسب ترکیبی خطی از توابع پایه شعاعی نمایش داد که از نوع توابع پایه غیر متعامد هستند. به بیان دیگر، آنومالی پتانسیل ثقل T در بیرون کره بیرهامر به صورت زیر بیان می‌شود [۵]:

رابطه (۵)
$$T(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, \Psi_i(x, y_i)$$

در رابطه (۵)، α_i ضرایب مقیاس بسط توابع پایه شعاعی و N تعداد این توابع پایه است.

اگرچه رابطه بین آنومالی پتانسیل و توابع پایه شعاعی به شکل یک رابطه خطی تعریف می‌شود اما در عمل از تابعک‌های خطی این کمیت به منظور مدل‌سازی میدان ثقل زمین استفاده می‌شود. آنومالی جاذبه که از جمله تابعک‌های خطی میدان ثقل زمین است و به کرات در مدل‌سازی‌های محلی میدان ثقل به کار رفته است، با استفاده از رابطه بنیادی ژئودزی فیزیکی به صورت زیر بیان می‌شود [۱۰]:

رابطه (۶)
$$\Delta g(x) = -\frac{\partial T(x)}{\partial |x|} - \frac{2}{|x|}\, T(x)$$

در رابطه فوق، Δg نشان دهنده آنومالی جاذبه است. بدین ترتیب با جایگزین کردن رابطه (۵) در (۶)، آنومالی جاذبه می‌تواند بر حسب توابع پایه شعاعی به صورت زیر به دست آید:

رابطه (۷)
$$\Delta g(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(-\frac{\partial \Psi_i(x,y_i)}{\partial |x|} - \frac{2}{|x|}\, \Psi_i(x, y_i) \right)$$

بدین ترتیب، هدف از مدل‌سازی محلی میدان ثقل، تعیین مختصات سه بعدی (مراکز و عمق‌ها) و ضرایب مقیاس توابع پایه شعاعی با استفاده از تعداد مشخصی از تابعک‌های آنومالی جاذبه روی سطح زمین است.

۳- حل مسئله معکوس با استفاده از الگوریتم پایدارسازی لونبرگ-مارکواردت

مدل‌سازی میدان ثقل با استفاده از مشاهدات اندازه‌گیری شده روی سطح زمین به عنوان یک مسئله معکوس در ژئودزی فیزیکی شناخته می‌شود. مسائل معکوس دارای چندین جواب می‌باشند و ویژگی بارز آن‌ها ناپایدار بودن است [۱۱]. بنا بر نظریه هدامرد، یک مسئله خوش وضع نامیده می‌شود اگر سه شرط زیر برایش برقرار باشد:

- به ازای تمام داده‌های مجاز، جواب وجود داشته باشد.
- به ازای تمام داده‌های مجاز، جواب یکتا باشد.
- جواب به صورت پیوسته به داده‌ها وابسته باشد.

درصورتی که یکی از شروط بالا برقرار نباشد مسئله بد وضع نامیده می‌شود [۱۱].

مسئله مدل‌سازی میدان ثقل زمین با استفاده از توابع پایه شعاعی نیز یک مسئله معکوس غیرخطی بر حسب پارامترهای مجهول این توابع است. اگرچه مسائل غیرخطی غالبا به روش تکراری و با تعداد تکرارهای دلخواه حل می‌شوند اما در مسائل بدوضع غیرخطی به دلیل ماهیت ناپایداری مسئله، از یک الگوریتم پایدارسازی غیرخطی به منظور دستیابی به تقریبی پایدار از جواب واقعی استفاده می‌شود. الگوریتم لونبرگ- مارکواردت یکی از پرکاربردترین الگوریتم‌های پایدارسازی در ریاضیات کاربردی است که توسط مارکواردت (۱۹۶۳) برای حل مسائل معکوس غیرخطی ارائه شد [۱۲]. این الگوریتم، روشی بین روش کاهش گرادیان[۱] و روش گاوس-نیوتن[۲] است. روش گاوس- نیوتن به سرعت در نزدیکی مینیمم محلی یا مینیمم مطلق همگرا می‌شود اما ممکن است که واگرا گردد. در مقابل،

[1] Gradient Descent Algorithm
[2] Gauss-Newton Algorithm

در روش کاهش گرادیان با انتخاب یک گام مناسب، همگرایی مسئله تضمین می‌شود، هرچند که سرعت همگرایی پایین می‌باشد [۱۳]. در این بخش ابتدا به تشریح الگوریتم لونبرگ-مارکوارت پرداخته می‌شود و پس از آن پیشنهاداتی جهت بهبود عملکرد این الگوریتم ارائه می‌گردد.

۳-۱- الگوریتم پایدارسازی لونبرگ-مارکوارت

از الگوریتم لونبرگ- مارکوارت برای یافتن جواب مسائل مینیمم سازی کمترین مربعات غیرخطی استفاده می‌شود. تابع f را به‌عنوان نگاشتی از فضای برداری پارامترهای مجهول $x \in \mathcal{R}^n$ به فضای برداری مشاهدات $y \in \mathcal{R}^m$ در نظر بگیرید به قسمی که $y = f(x)$. با فرض در اختیار داشتن مشاهدات y و مقادیر اولیه پارامترهای مجهول x_0، هدف یافتن بردار x^* است به قسمی که به بهترین شکل در رابطه f صدق کند؛ بدین معنی که فاصله بین مقادیر مشاهدات y و مقادیر برآورد شده آن‌ها $\hat{y}$ که بردار باقیمانده‌ها $r(x) = y - \hat{y}(x)$ نامیده می‌شود، مینیمم شود. بنابراین تابعی که در این الگوریتم مینیمم‌سازی می‌شود، به شکل رابطه (۸) تعریف می‌شود [۱۴]:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} r_j^2(x)$$ رابطه (۸)

با در نظر گرفتن بردار باقیمانده‌ها به صورت $r(x) = (r_1(x), r_2(x), \dots, r_m(x))$، می‌توان $f(x)$ را به شکل $f(x) = \frac{1}{2}\|r(x)\|^2$ بازنویسی کرد. الگوریتم لونبرگ- مارکوارت بر اساس تقریب خطی f در یک همسایگی از x عمل می‌کند. برای یک Δx کوچک، بسط سری تیلور با استفاده از رابطه (۹) بیان می‌شود [۱۴]:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + J(x)\Delta x$$ رابطه (۹)

در رابطه فوق $J(x)$ ماتریس ژاکوبین است که مشتقات تابع $f(x)$ را با استفاده از رابطه (۱۰) تعیین می‌کند:

رابطه (۱۰)

$$J(x) = \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \;\;,\;\; 1 \le j \le m \;\;,\;\; 1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}$$

مشابه تمام روش‌های بهینه‌سازی غیرخطی، جواب الگوریتم لونبرگ- مارکوارت طی یک فرآیند تکراری به دست می‌آید. با شروع از بردار اولیه x_0، الگوریتم دنباله‌ای از بردارهای $x_1, x_2, \dots$ را تولید می‌کند که به بردار مینیمم کننده x^* برای نگاشت f همگرا می‌شود. بنابراین لازم است که در هر تکرار Δx_k را به نحوی تعیین کرد که کمیت زیر را مینیمم سازد [۱۴]:

$$\|y - f(x+\Delta x)\| \approx \|y - f(x_k) - J(x_k)\Delta x_k\| = \|r(x_k) - J(x_k)\Delta x_k\|$$ رابطه (۱۱)

بدین ترتیب می‌توان ادعا کرد که Δx_k جواب یک مسئله کمترین مربعات خطی است. در این مسئله کمترین مربعات خطی، جواب مینیمم هنگامی به دست می‌آید که بردار $r(x_k) - J(x_k)\Delta x_k$ بر فضای ستونی $J(x_k)$ عمود باشد [۱۴]. به بیان دیگر برای حل مسئله مینیمم‌سازی می‌بایست $\nabla f(x) = 0$ باشد. در حالت غیرخطی، گرادیان با استفاده از رابطه (۱۲) به دست می‌آید [۱۴]:

$$\nabla f(x) = J(x)^T (J(x)\Delta x - r(x))$$ رابطه (۱۲)

جوابی که با استفاده از رابطه (۱۳) به دست می‌آید، تحت عنوان جواب معادلات نرمال شناخته می‌شود [۱۴]:

$$\Delta x_k = (J(x)^T J(x))^{-1} J(x)^T r(x_k)$$ رابطه (۱۳)

در رابطه بالا، $J(x)^T J(x)$ تقریبی از ماتریس هسین است که با فرض کوچک بودن مشتقات مرتبه دوم $r_j(x)$ یعنی $\nabla^2 r_j(x)$ و یا کوچک بودن باقیمانده‌های $r_j(x)$ با استفاده از ماتریس ژاکوبین محاسبه شده است. در واقع رابطه دقیق ماتریس هسین به‌صورت زیر به دست می‌آید [۱۵]:

رابطه (۱۴)

$$H = \nabla^2 f(x) = J(x)^T J(x) + \sum_{j=1}^{m} r_j(x) \nabla^2 r_j(x)$$

به‌منظور تعدیل جواب معادلات نرمال در رابطه (۱۴) عناصر قطری ماتریس هسین با افزودن ترمی تحت عنوان پارامتر پابدارسازی تغییر داده می‌شود. بدین ترتیب جواب مسئله به‌صورت تکراری و با استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید [۱۴]:
رابطه (۱۵)

$$\Delta x_k = -(H(x_k) + \mu I)^{-1} J(x_k)^T r(x_k)$$
$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

در رابطه (۱۵)، μ پارامتر پایدارسازی و I ماتریس همانی است. وظیفه پارامتر پایدارسازی کنترل موقعیت‌هایی است که در آن ماتریس ژاکوبین کمبود رتبه دارد یا به عبارت دیگر ماتریس هسین تکین است. بنابراین پارامتر پایدارسازی در هر تکرار می‌بایست به هنگام شود. نحوه تعیین μ به این صورت است که اگر خطا در مرحله‌ای کاهش یابد، μ را با استفاده از یک ضریب ثابت به منظور کاستن از اثر کاهش گرادیان کاهش می‌دهند و برعکس اگر خطا در مرحله‌ای افزایش یابد، به منظور افزایش اثر کاهش گرادیان μ را با همان ضریب ثابت افزایش می‌دهند [۹]. ایراد وارد به این روش این است که در صورت بزرگ بودن مقدار پارامتر پایدارسازی، ماتریس هسین به هیچ وجه در محاسبات شرکت نمی‌کند. به‌منظور برطرف نمودن این مشکل، ماتریس همانی با یک ماتریس قطری متشکل از عناصر قطر اصلی ماتریس هسین جایگزین می‌شود. بدین ترتیب جواب الگوریتم لونبرگ- مارکواردت با استفاده از رابطه‌ی (۱۶) بیان می‌شود [۱۴]:

رابطه (۱۶)

$$\Delta x_k = -(H(x_k) + \mu\, diag(H(x_k))^{-1}\ J(x_k)^T\, r(x_k)$$

شرط توقف الگوریتم لونبرگ- مارکواردت را می‌توان یکی از موارد زیر در نظر گرفت:

- اندازه تغییرات باقیمانده‌ها یعنی ($r(x_k)^T r(x_k)$ از یک حد آستانه کوچک‌تر باشد.
- تغییرات نسبی Δx_k از یک حد آستانه کوچک‌تر باشد.
- تعداد تکرارهای الگوریتم به حداکثر تعداد تکرار در نظر گرفته شده، $K_{\max}$ رسیده باشد.

۳-۲- بهبود الگوریتم پایدارسازی لونبرگ- مارکواردت

میزان تعدیل در الگوریتم لونبرگ- مارکواردت با استفاده از پارامتر پایدارسازی تعیین می‌شود که بر رفتار سیستم معادلات مشاهداتی تاثیر می‌گذارد. انتخاب نامناسب پارامتر پایدارسازی می‌تواند موجب کاهش سرعت همگرایی به جواب مینیمم مطلق، افزایش احتمال همگرایی جواب مسئله به جواب مینیمم نسبی و یا ناپایداری سیستم معادلات مشاهداتی گردد [۱۶]. به همین دلیل می‌توان عملکرد الگوریتم لونبرگ-مارکواردت را با انتخاب مقادیر مناسب برای پارامتر پایدارسازی در هر مرحله و با توجه به پارامترها و مجهولات مورد جستجوی مسئله بهبود داد. بدین ترتیب در این بخش، رابطه و روشی مناسب جهت تعیین مقدار اولیه پارامتر پایدارسازی و به هنگام‌سازی آن بر مبنای مقادیر پارامترهای مجهول پیشنهاد می‌شود که منجر به بهبود نحوه دستیابی به جواب مسئله می‌گردد.
اگرچه روش سنتی در مقداردهی اولیه پارامتر پایدارسازی در الگوریتم لونبرگ- مارکواردت به این صورت است که آن را برابر با یک عدد ثابت در نظر می‌گیرند، اما مقدار اولیه این پارامتر را می‌توان بر مبنای مقادیر اولیه پارامترهای مجهول با استفاده از رابطه (۱۷) تعیین نمود [۱۷]:

رابطه (۱۷)

$$\mu = \mu_0 \max\left(diag\left(J(x_0)^T J(x_0) \right) \right)$$

در رابطه فوق، μ پارامتر پایدارسازی، $J(x_0)$ ماتریس ژاکوبین ارزیابی شده به ازای مقادیر اولیه پارامترهای مجهول x_0 و μ_0 یک ضریب ثابت دلخواه است.

علاوه بر این، به‌طور سنتی در الگوریتم لونبرگ-مارکواردت ابتدا یک ضریب ثابت دلخواه در نظر گرفته شده و در صورت کاهش خطای خروجی در هر تکرار، مقدار پارامتر پایدارسازی با تقسیم بر این ضریب ثابت، کوچک می‌شود. از سوی دیگر در صورت افزایش خطای خروجی در تکرار مورد نظر، پارامتر پایدارسازی با ضرب شدن در همان ضریب ثابت در نظر گرفته شده بزرگ می‌شود. در این تحقیق به منظور بهبود عملکرد الگوریتم پایدارسازی، مقادیر پارامتر پایدارسازی در هر تکرار بر مبنای مقادیر پارامترهای مجهول در همان تکرار به هنگام می‌شوند. بر اساس روش پیشنهادی، چنانچه خطای خروجی در یک تکرار کاهش یابد، پارامتر پایدارسازی با استفاده از رابطه‌ی (۱۸) به هنگام می‌شود [۱۷]:

رابطه (۱۸)

$$\mu_{k+1} = \mu_k \times \max[\beta_0, 1-(2\times P_k - 1)^3]$$

$$\rho_k = \alpha_0$$

در رابطه (۱۸)، β_0 و α_0 اعدادی ثابت هستند که به صورت آزمون حدس و خطا توسط کاربر تعیین می‌شوند و ρ_k با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$P_k = \frac{e(x_k) - e(x_{k-1})}{\sigma_k^2}$$

رابطه (۱۹)

در رابطه (۱۹)، $e(x_k)$ مجموع مربعات باقیمانده‌ها و σ_k^2 مجموع تغییرات پارامترها و باقیمانده‌ها است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

رابطه (۲۰)

$$\sigma_k^{\,2} = 2\Delta x_k^{\,T}\left(\mu \Delta x_k + J\left(x_k\right)^T r\left(x_k\right) \right)$$

در صورت افزایش خطای خروجی در یک تکرار، پارامتر پایدارسازی به ترتیب زیر به هنگام می‌شود [۱۷]:

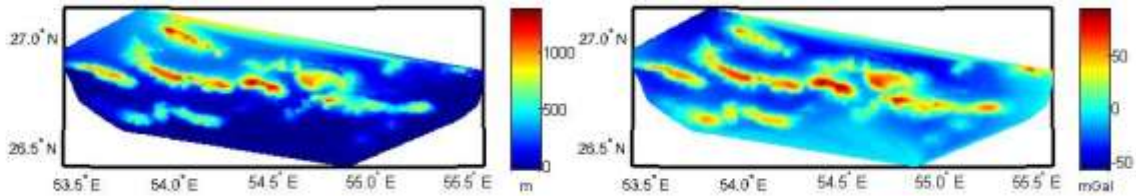
$$\mu_{k+1} = \mu_k \rho_k$$

رابطه (۲۱)

$$\rho_{k+1} = \alpha_0 \rho_k$$

۴- مطالعه موردی: منطقه فارس ساحلی

در این تحقیق به‌منظور مدل‌سازی محلی میدان ثقل زمین، منطقه فارس ساحلی در محدوده طول جغرافیایی $53.42 < \lambda < 55.58$ درجه و عرض جغرافیایی $26.54 < \varphi < 27.28$ درجه در نظر گرفته شد. مجموعه داده‌های این منطقه شامل مشاهدات شتاب جاذبه در ۶۳۵۰ نقطه است که از بین آنها تعداد ۱۰۶ نقطه به عنوان نقطه کنترل گراویمتری انتخاب شدند. علاوه بر این، ۵ نقطه GPS/Leveling موجود در این منطقه به عنوان نقاط کنترل ارتفاعی برای ارزیابی دقت مدل ژئوئید محاسبه شده با استفاده توابع پایه شعاعی به کار رفت. ابتدا با کم کردن شتاب جاذبه نرمال از مشاهدات شتاب جاذبه، آنومالی جاذبه در نقاط مشاهداتی و نقاط کنترل این منطقه بدست آمد [۱۰]. سپس، مشاهدات آنومالی جاذبه با اعمال تصحیح هوای آزاد به داده‌های آنومالی جاذبه هوای آزاد تبدیل شدند [۱۸]. برای محلی‌سازی مشاهدات، اثر جهانی میدان محاسبه شده بر حسب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ با استفاده از مدل EGM2008 از روی مشاهدات حذف شد. بدین‌ترتیب، مشاهدات آنومالی جاذبه هوای آزاد باقیمانده برای مدل‌سازی محلی میدان ثقل در منطقه فارس ساحلی به دست آمد. تغییرات ارتفاعی منطقه مورد مطالعه و آنومالی جاذبه هوای آزاد باقیمانده در شکل (۲) نشان داده شده است.

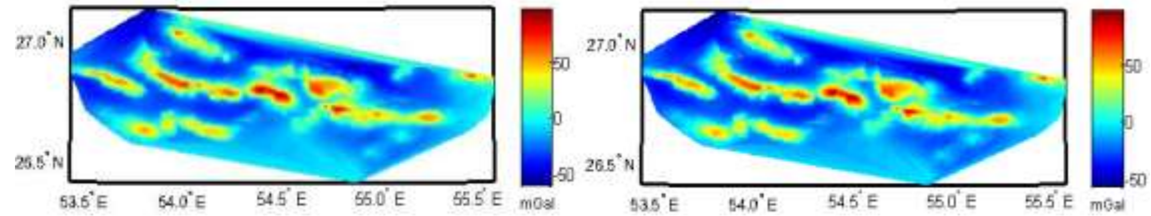


شکل ۲: تغییرات ارتفاعی منطقه (چپ؛ متر) و آنومالی جاذبه هوای آزاد باقیمانده (راست؛ میلی‌گال) در منطقه فارس ساحلی

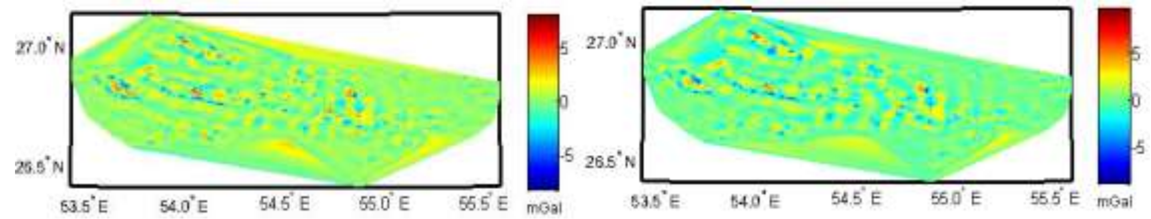
به منظور مدل‌سازی محلی میدان ثقل، در اولین مرحله لازم است که نوع کرنل توابع پایه شعاعی انتخاب شود که در این تحقیق از کرنل دو قطبی شعاعی بدین‌منظور استفاده شده است. برای تعیین پارامترهای توابع پایه شعاعی، ابتدا ۱۶۹ تابع پایه در یک شبکه گرید منظم چیده شدند. سپس عمق اولیه این توابع به روش آزمون و خطا و بر اساس مینیم‌سازی RMS آنومالی جاذبه باقیمانده سرشکنی که به صورت اختلاف بین مقادیر آنومالی جاذبه مشاهده شده و آنومالی جاذبه مدل شده در نقاط کنترل گراویمتری تعریف می‌شود، به دست آمد. بدین ترتیب با تعیین موقعیت اولیه مراکز و عمق دو قطبی‌های شعاعی، ضرایب مقیاس اولیه آن‌ها از طریق سرشکنی کمترین مربعات خطی تعیین شد. پس از تعیین مقادیر اولیه مجهولات، پارامترهای توابع پایه شعاعی با تشکیل سیستم معادلات مشاهداتی بر اساس مشاهدات آنومالی جاذبه هوای آزاد باقیمانده با استفاده از دو روش الگوریتم لونبرگ-مارکواردت ساده و الگوریتم لونبرگ-مارکواردت بهبود یافته طی یک پروسه تکراری بهینه‌سازی شدند. پس از برآورد مقادیر بهینه پارامترهای توابع پایه شعاعی، آنومالی جاذبه هوای آزاد باقیمانده در نقاط مشاهداتی محاسبه شد. در نهایت، باقیمانده‌های سرشکنی به صورت تفاضل بین آنومالی جاذبه هوای آزاد باقی‌مانده مشاهده شده و مدل‌سازی شده به دست آمدند. لازم به ذکر است که شرط توقف الگوریتم پایدارسازی لونبرگ-مارکواردت در هر دو حالت به صورتی در نظر گرفته شد که انحراف معیار باقیمانده‌های سرشکنی در هر مرحله حداقل 10^{-5} میلی گال نسبت به مرحله قبل بهبود یافته باشد. نتایج عددی به دست آمده بر مبنای الگوریتم لونبرگ-مارکواردت ساده در جدول (۱) نشان داده شده است. با توجه به جدول (۱)، دقت مطلوب در مدل‌سازی محلی میدان ثقل در منطقه فارس ساحلی پس از ۳۱۹۴ تکرار معادل ۱/۳۳ میلی‌گال به‌دست آمد. از سوی دیگر بر مبنای روندی مشابه، دقت مطلوب در مدل‌سازی محلی میدان ثقل با استفاده از الگوریتم لونبرگ-مارکواردت بهبود یافته پس از ۲۰ تکرار معادل ۱/۴۵ میلی‌گال به دست آمد. مقایسه نتایج به دست آمده بر مبنای الگوریتم‌های لونبرگ-مارکواردت ساده و بهبود یافته بر اساس تعداد تکرارهای آن‌ها به خوبی گویای سرعت بسیار بالای روش بهبود یافته در دستیابی به بهترین دقت ممکن برای داده‌های گراویمتری در منطقه فارس ساحلی است. این سرعت و دقت مناسب در الگوریتم لونبرگ-مارکواردت بهبود یافته مرهون تغییراتی است که بر پارامتر پایدارسازی در تعیین مقدار اولیه آن بر اساس مقادیر اولیه دو قطبی‌های شعاعی و به هنگام‌سازی این پارامتر در هر تکرار بر اساس مقادیر پارامترهای دو قطبی‌های شعاعی در همان تکرار است. در شکل‌های (۳و ۴) به ترتیب تغییرات آنومالی جاذبه هوای آزاد باقیمانده مدل‌سازی شده و تغییرات باقیمانده‌های به دست آمده با استفاده از توابع پایه شعاعی به دو حالت ذکر شده برای الگوریتم پایدارسازی مقایسه شده است.

جدول ۱: نتایج به دست آمده با استفاده از کرنل چند قطبی شعاعی در نقاط گراویمتری

	الگوریتم لونبرگ-مارکواردت ساده						
	عمق کرنل‌ها (کیلومتر)	تعداد کرنل‌ها	تعداد تکرارها	مینیمم	ماکزیمم	میانگین	انحراف معیار
باقیمانده‌های سرشکنی آنومالی جاذبه هوای آزاد باقیمانده در نقاط مشاهده (میلی گال)	۴۶	۱۶۹	۳۱۹۴	-۹/۶۲	۸/۲۲	-۰/۰۰۶	۱/۳۳
باقیمانده‌های سرشکنی آنومالی جاذبه هوای آزاد باقیمانده در نقاط کنترل گراویمتری (میلی گال)	۴۶	۱۶۹	۳۱۹۴	-۷/۲۸	۴/۵	-۰/۲۷	۱/۶۸
	الگوریتم لونبرگ-مارکواردت بهبود یافته						
	عمق کرنل‌ها (کیلومتر)	تعداد کرنل‌ها	تعداد تکرارها	مینیمم	ماکزیمم	میانگین	انحراف معیار
باقیمانده‌های سرشکنی آنومالی جاذبه هوای آزاد باقیمانده در نقاط مشاهده (میلی گال)	۱۸/۷۵	۱۶۹	۲۰	-۹/۵۷	۹/۹۲	۰/۰۰۱	۱/۴۵
باقیمانده‌های سرشکنی آنومالی جاذبه هوای آزاد باقیمانده در نقاط کنترل گراویمتری (میلی گال)	۱۸/۷۵	۱۶۹	۲۰	-۷/۵۶	۴/۸۷	-۰/۱۹	۱/۸۳



شکل ۳: تغییرات آنومالی جاذبه هوای آزاد مدل‌سازی شده با استفاده از دوقطبی‌های شعاعی بر مبنای الگوریتم لونبرگ-مارکواردت ساده (چپ؛ میلی‌گال) و بهبود یافته (راست؛ میلی‌گال)



شکل ۴: تغییرات باقیمانده‌های سرشکنی در مشاهدات آنومالی جاذبه هوای آزاد محاسبه شده با استفاده از دوقطبی‌های شعاعی بر مبنای الگوریتم لونبرگ-مارکواردت ساده (چپ؛ میلی‌گال) و بهبود یافته (راست؛ میلی‌گال)

به‌منظور بررسی عملکرد کرنل‌های مختلف توابع پایه شعاعی در محاسبه مدل ژئوئید، دقت ارتفاعات ژئوئید در ۵ نقطه GPS/Leveling بررسی شد. ارتفاع ژئوئید این نقاط به این ترتیب محاسبه شد که ابتدا آنومالی پتانسیل باقیمانده با حذف اثر جهانی میدان با استفاده از مدل EGM2008 تا درجه و مرتبه ۳۶۰ محاسبه شده و سپس آنومالی پتانسیل باقیمانده در این نقاط با استفاده از پارامترهای توابع پایه شعاعی برآورد شد. با جمع آنومالی پتانسیل جهانی محاسبه شده با استفاده از هارمونیک‌های کروی و آنومالی پتانسیل باقیمانده محاسبه شده با استفاده از توابع پایه شعاعی و استفاده از فرمول برنز در میدان نرمال سومیگلیانا-پزتی [۱۹]، ارتفاع شبه ژئوئید در این نقاط کنترل ارتفاعی به دست آمد. سپس با اعمال تصحیح شبه ژئوئید (اختلاف بین سطوح ژئوئید و شبه ژئوئید)، ارتفاع ژئوئید در این نقاط محاسبه شد. تصحیح شبه ژئوئید با استفاده از رابطه (۲۲) بیان می‌شود [۲۰].

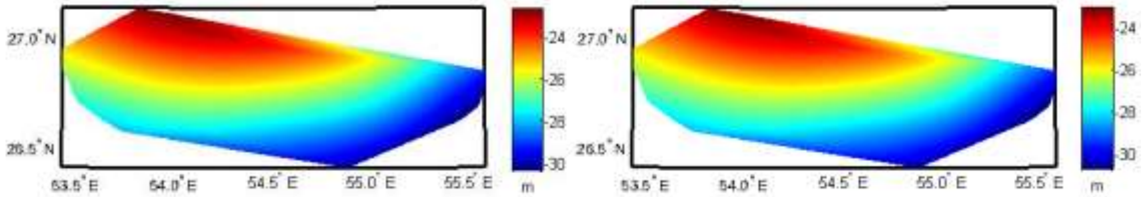
$$N-\zeta=\frac{\Delta g^B}{\bar{\gamma}}H \qquad \text{رابطه (۲۲)}$$

در رابطه فوق، N ارتفاع ژئوئید، ζ ارتفاع شبه ژئوئید، Δg^B آنومالی جاذبه بوگه، $\bar{\gamma}$ میدان جاذبه نرمال و H ارتفاع ارتومتریک است.

شکل (۵) تغییرات مدل ژئوئید را در دو حالت ذکر شده برای الگوریتم پایدارسازی به صورت ساده و بهبود یافته نمایش می‌دهد. در حالت استفاده از الگوریتم لونبرگ-مارکواردت ساده، دقت مدل ژئوئید ۱۳/۹ سانتیمتر و در حالت به کارگیری الگوریتم لونبرگ-مارکواردت بهبود یافته، دقت ۱۲/۷ سانتیمتر برآورد شد که این موضوع نشان دهنده تأثیر مثبت تغییرات پیشنهاد شده برای بهبود عملکرد الگوریتم لونبرگ-مارکواردت در ارتقای دقت مدل ژئوئید است. نتایج حاصل از این محاسبات به‌صورت آماری در جدول (۲) آورده شده است. تغییرات ارتفاعات ژئوئید محاسبه شده در نقاط مشاهده با استفاده از دوقطبی‌های شعاعی بر مبنای دو حالت ذکر شده برای الگوریتم پایدارسازی نیز در شکل (۵) نشان داده شده است.

جدول ۲: نتایج به دست آمده با استفاده از کرنل چند قطبی شعاعی در نقاط GPS/Levelling

	الگوریتم لونبرگ-مارکواردت ساده						
	عمق کرنل‌ها (کیلومتر)	تعداد کرنل‌ها	تعداد تکرارها	مینیمم	ماکزیمم	میانگین	انحراف معیار
ارتفاع زئوئید محاسبه شده در نقاط GPS/Levelling (متر)	۴۶	۱۶۹	۳۱۹۴	۰/۰۲	۰/۳۳	۰/۱۷	۰/۱۳۹
	الگوریتم لونبرگ-مارکواردت بهبود یافته						
	عمق کرنل‌ها (کیلومتر)	تعداد کرنل‌ها	تعداد تکرارها	مینیمم	ماکزیمم	میانگین	انحراف معیار
ارتفاع زئوئید محاسبه شده در نقاط GPS/Levelling (متر)	۱۸/۷۵	۱۶۹	۲۰	۰/۰۳۶	۰/۳۳۱	۰/۱۴۷	۰/۱۲۷



شکل ۵: تغییرات ارتفاعات ژئوئید مدل‌سازی شده با استفاده از دوقطبی‌های شعاعی بر مبنای الگوریتم لونبرگ–مارکواردت ساده (چپ؛ متر) و بهبود یافته (راست؛ متر)

به‌طور کلی می‌توان ادعا کرد که پارامتر پایدارسازی تأثیر بسزایی در روند حل مسئله دارد، به نحوی که انتخاب مناسب آن در اولین مرحله و به‌هنگام‌سازی آن به شیوه‌ای مناسب در مراحل بعدی می‌تواند به همگرا شدن هرچه سریع‌تر جواب مسئله به جواب بهینه کمک کند. لازم به ذکر است که در این تحقیق مدل‌سازی محلی میدان ثقل در منطقه فارس ساحلی تنها با استفاده از ۱۶۹ کرنل صورت گرفت که معادل ۲/۷ درصد تعداد کل مشاهدات است و این موضوع نشان دهنده سرعت بالای انجام محاسبات در برآورد پارامترهای توابع پایه شعاعی می‌باشد.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این تحقیق برای مدل‌سازی محلی میدان ثقل زمین با استفاده از داده‌های شتاب جاذبه در منطقه فارس ساحلی از کرنل دو قطبی شعاعی استفاده شد. در این مسئله پارامترهای توابع پایه شعاعی شامل مراکز، عمق‌ها و ضرایب مقیاس به‌طور هم‌زمان به روش کمترین مربعات و با استفاده از الگوریتم پایدارسازی غیرخطی لونبرگ–مارکواردت طی یک فرایند تکراری تعیین شدند. به منظور بهبود عملکرد این الگوریتم پایدارسازی، مقدار اولیه پارامتر پایدارسازی بر حسب ماتریس ژاکوبین ارزیابی شده در مقادیر اولیه توابع پایه شعاعی به‌دست آمد. همچنین با ارائه روشی مناسب برای به‌هنگام سازی پارامتر پایدارسازی برحسب تغییرات پارامترهای توابع پایه در هر تکرار، کارایی عددی الگوریتم لونبرگ–مارکواردت افزایش داده شد. نتایج عددی نشان داد که اعمال تغییرات پیشنهادی در الگوریتم بهینه‌سازی موجب تسریع در همگرایی جواب مسئله به جواب بهینه به واسطه پارامتر پایدارسازی و نیاز به تعداد تکرارهای بسیار کم شد. نکات برجسته این تحقیق به طور خلاصه عبارتند از:

- بهبود سرعت محاسبه پارامترهای توابع پایه شعاعی مورد نیاز برای مدل‌سازی میدان ثقل زمین به واسطه تعداد بسیار کم آنها در مقایسه با تعداد مشاهدات موجود در منطقه،
- ارائه رابطه‌ای مناسب برای تعیین مقدار اولیه پارامتر پایدارسازی در الگوریتم لونبرگ–مارکواردت،
- ارائه روشی مناسب برای به‌هنگام‌سازی پارامتر پایدارسازی در الگوریتم لونبرگ مارکواردت بر مبنای مقادیر پارامترهای مجهول مدل‌سازی در هر تکرار،
- بهبود سرعت همگرایی جواب مسئله مدل‌سازی میدان ثقل به جواب بهینه به واسطه بهبود الگوریتم لونبرگ–مارکواردت بر حسب پارامتر پایدارسازی آن.

مراجع

[1] T. Wittwer, "Regional gravity field modeling with radial basis functions", TU Delft: Doctoral dissertation, (2009).

[2] M. Lin, H. Denker, J. Müller, "Regional

gravity field modelling using free positioned point mass", Studia et Geophysica, 58, 207-226, (2014).

[3] M. Antoni, W. Keller, M. Weigelt, "Recovery of residual GRACE-observations by radial base functions", Geodetic Institute, University of Stuttgart, (2008).

[4] M. Weigelt, M. Antoni, W.Keller, "Regional gravity field recovery from GRACE using position optimized radial base functions. Gravity", Geoid and Earth Observation, International Association of Geodesy Symposia 135, 139-146, (2010).

[5] A. Safari, I. Foroughi, M. A. Sharifi, "Local gravity field modeling with radial basis functions, case study: gravity field in Persian Gulf", 3 (39), 48-33, (2013).

[6] A. Eiker, "Gravity Field Refinement by Radial Basis Functions From In-situ Satellite Data", Dissertation, (2012).

[7] R. Klees, R. Tenzer, I. Prutkin, T. Wittwer, "A data-driven approach to local gravity field modeling using spherical radial basis functions. Journal of Geodesy, 82, 457-471, (2008).

[8] A. Shahbazi, "Quasi-geoid determination using spherical radial basis functions". M.Sc. Dissertation, University of Tehraan, (2015).

[9] A. N. Marchenko, "Parameterization of the Earth's gravity field. Point and line singularities". Lviv Astronomical and Geodetic Society, (1998).

[10] H. Moritz, "Advanced Physical Geodesy". Wells Kent, Abacus Press Tunbridge, (1980).

[11] A. Tarantola, "Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation", Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), (2004).

[12] D. W. Marquardt, "An Algorithm For Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters". Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 11, 431-441, (1963).

[13] K. Tyagi, "Second Order Training Algorithms For Radial Basis Function Neural Network", The University of Texa, (2011).

[14] M. I. A. Lourakis, "A brief discription of the Levenberg-Marquardt algorithm implemend by Levmar", Foundation of Research and Technology, 4, 1-6, (2005).

[15] G. H. Golub, C. F. Van Loan, "Matrix Computations". Johns Hopkins University Press, (1996).

[16] A. Araneda, "Variation of the Levenberg Marquardt method: An attemp to improve efficiency", Massachusette Institude of technology, (2004).

[17] H. Gavin, "The Levenberg-Marquardt method for nonlinear least squares curve-fitting problems", Duke University: Department of Civil and Environmental Engineering, 1-15, (2011).

[18] A. Safari, Physical Geodesy, University of Tehran Press, (2011).

[19] A. A. Ardalan, E. W. Grafarend, "Ellipsoidal geoidal undulations (ellipsoidal Bruns formula)", Journal of Geodesy, 75, 544-552, (2001).

[20] W. Featherstone, J. Kirby, "Estimates of the separation between the Geoid and the Quasi-Geoid over austrolia", Geomatics Research Australasia, 79-90, (1998).

K. N. TOOSI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF GEODESY AND GEOMATICS ENGINEERING

Journal of Geospatial Information Technology
Vol.4, No.3, Autumn 2016

On the regional gravity field modeling via Radial Basis Functions and modefied Levenberg-Marcoardet Algorithm

Mahboobeh Mohammad Yusefi Bahlouli Ahmadi [1*], Abdolreza Safari [2], Anahita Shahbazi [3]

1- M.Sc. Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.
2- Associate Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.
3- M.Sc. in Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

Abstract

The gravity field modeling can be performed in global or local scales utilizing satellite, airborne, terrestrial gravity data or a combination of these observations. One of the common methods in gravity field approximation is to use Spherical Harmonic expansion. Due to the global characteristics of the Spherical Harmonic base functions, a small local signal variation can change all the coefficients in the expansion, and therefore, they are not a suitable choice for regional applications. In order to overcome this problem, there are several groups of base functions, including Radial Basis Functions (RBFs). In gravity field modeling using RBFs, the disturbing potential is represented by a linear combination of an infinite set of RBFs. Hence, any linear functional of the disturbing potential, such as gravity anomaly or gravity disturbance, can be also expressed based on the RBF expansion. Thus, measurable quantities of the Earth's gravity field can be utilized in order to determine the RBF parameters in gravimetric modeling. In this study, system of observation equations is set based on the Radial Multi-Poles of order 2 and free-air gravity anomalies and unknown parameters, including RBF centers, RBF bandwidths (or depths) and scaling coefficients, are determined using a least-squares method. In fact, the Levenberg-Marquardt algorithm is applied as a non-linear regularization method to simultaneously optimize all the RBF parameters. In order to enhance the numerical efficiency of this algorithm, a novel scheme is proposed to initialize and update the regularization parameter. Finally, numerical results obtained from the modified Levenberg-Marquardt algorithm are compared with the ones obtained from the simple form of this algorithm. Applying the proposed modifications to this algorithm, the unknown parameters are determined in a fast procedure and with a significant reduction in the number of iterations. Moreover, these modifications can increase the probability of convergence of the solution to the global minimum.

Key words: Radial Base Function, Radial multipole kernel, Regional gravity field modeling, nonlinear inverse problem, Levenberg-Marquardt algorithm.

Correspondence Address. Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, North Amirabad Avenue, Tehran, Iran.
Tel: 0098-915-984-8722.
Email: mmyusefi@ut.ac.ir