نشریه علمی مهندسی فناوری اطلاعات مکانی

سال هشتم، شماره نخست، بهار ۱۳۹۹

Vol.8, No.1, Spring 2020

۶۳-۷۸

مقاله پژوهشی

DOR: 20.1001.1.20089635.1399.8.1.4.4

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی نقشه برداری

اسپلاین بیضوی و کاربرد آن در تولید داده‌های شتاب ثقل سطح دریا در خلیج فارس

مصطفی کیانی شاهوندی[۱]، نبی الله چگینی[۲*]، عبدالرّضا صفری[۳]، برزو نظری[۴]

۱- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی، دانشگاه تهران

۲- استادیار دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش

۳- استاد گروه ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی، دانشگاه تهران

۴- استادیار گروه ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی، دانشگاه تهران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۱۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۲/۲۰

چکیده

در این مقاله، روش درون‌یابی برای تولید داده‌های شتاب ثقل در سطح دریا در خلیج فارس با استفاده از ژئوئید حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، مدل‌های ژئوپتانسیل با قدرت تفکیک بالا و اسپلاین بیضوی ارائه می‌گردد. ابتدا به تعریف توابع اسپلاین بیضوی در یک فضای هیلبرت متشکّل از تمامی توابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر پرداخته شده است. جهت تعریف توابع اسپلاین، نرم عملگرهای دیفرانسیلی خطی ازجمله بلترامی و هلمهولتز (از نوع ساده و تکراری) بر روی یک رویه بیضیگون کمینه گردیده و توابع اسپلاین به گونه‌ای تعیین می‌شوند که در شرایط دیریکله گسسته معلوم بر روی سطح بیضیگون صدق نمایند. در این راستا توابع گرین و نیز هسته های بازتولید فضاهای هیلبرت نقش مهمی را ایفا می‌کنند. جهت تولید داده‌های شتاب ثقل، ابتدا ارتفاع ژئوئید به دست‌آمده از روش ارتفاع سنجی ماهواره‌ای توسط رابطه‌ی برونز بیضوی به پتانسیل باقیمانده تبدیل و به آن پتانسیل ژئوئید اضافه می‌گردد تا پتانسیل واقعی بدست آید. در ادامه اثر میدان مرجع از روی پتانسیل واقعی حذف و اختلاف پتانسیل حاصل می‌گردد. در مرحله بعد، با استفاده از اسپلاین بیضوی برای مسأله دیریکله گسسته به اختلاف پتانسیل تابعی برازانده و عملگر گرادیان بر روی آن اعمال می‌شود. پس از آن اثر میدان مرجع حذف شده، به صورت شتاب ثقل به مقادیر به دست آمده از مرحله قبل افزوده می‌گردد. برای این منظور، از بسط شتاب جاذبه بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ به علاوه نیروی گریز از مرکز استفاده می‌شود. داده‌های شتاب ثقل به‌دست آمده توسط آنومالی هوای آزاد به سطح ژئوئید منتقل می‌شوند. در نهایت مقایسه‌ای بین روش درون‌یابی اسپلاین بیضوی و کروی ارائه می‌گردد.

کلید واژه‌ها : کمینه‌سازی نرم عملگر دیفرانسیلی، هسته باز تولید، اسپلاین بیضوی، درون یابی، شتاب ثقل حاصل از عملیات کشتی.

* نویسنده مکاتبه کننده: دانشکده ریاضی. دانشگاه تفرش، تفرش.

تلفن: ۹۸۸۶۳۶۲۲۷۴۳۰

Email: nabichegini @ tafreshu.ac. ir

۱- مقدمه

یکی از اهداف مهم در ژئودزی و ژئوفیزیک، مدل سازی میدان ثقل زمین است. داده مهم برای مدل-سازی میدان ثقل زمین، شتاب ثقل اندازه‌گیری شده در سطح زمین است؛ این در حالی است که در مناطق دریایی، به دلیل عوامل مختلفی نظیر خطاهای ناشی از تعیین موقعیت، نوسانات کشتی، مشکل تفکیک شتاب‌های حرکت کشتی از شتاب جاذبه و همچنین خطاهای صفر، کالیبراسیون، ضرایب مقیاس و خطاهای ناشی از دما و رطوبت، شتاب ثقل مشاهده شده از دقت بالایی برخوردار نیست[۱]. از طرفی در داده‌های مورد مطالعه، داده‌های ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای از دقت مطلوبی برخوردار است؛ به همین دلیل، مسأله‌ی تولید شتاب ثقل از داده‌های ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای توسط برخی از محققان مورد مطالعه قرار گرفته است. از جمله تحقیقات انجام‌شده در این مسأله، تولید شتاب ثقل با استفاده از حل معکوس انتگرال استوکس برای تعیین شتاب ثقل در دریا است[۲].

داده‌های ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای برای تعیین آنومالی ثقل به صورت گسترده در ژئودزی مورد استفاده قرار می‌گیرند. روش‌های متداول در حل این مسأله، عمدتا استفاده از انتگرال استوکس، هوتین و یا ونینگ ماینز است. بدلیل همواری بالای توابع اسپلاین، استفاده از درون‌یابی اسپلاین یکی دیگر از روش‌های مورد علاقه محققان در حل این گونه مسائل است[۷، ۱۰، ۱۱ و۱۵]. با توجه به هندسه زمین، اسپلاین‌های کروی و بیضوی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. درون‌یابی اسپلاین برای حالت کروی در منابع زیادی مورد توجه قرار گرفته است[۳، ۴، ۵، ۶، ۸ و۹]. اسپلاین کروی در واقع تعمیم اسپلاین مثلثاتی بر روی دایره در صفحه است که بر روی یک رویه خمیده مطرح می‌گردد؛ بنابراین بسیاری از خواص اسپلاین کروی مشابه با حالت دو بعدی آن بر روی دایره است. هدف اصلی این مقاله، تعیین مینیمم‌کننده نرم عملگرهای دیفرانسیلی خاصی بر روی پوسته یک بیضیگون است که به اسپلاین‌های بیضوی منجر می‌گردد. تعیین اسپلاین‌های روی یک کره قبلا مورد مطالعه قرار گرفته است. یکی از مهم‌ترین تحقیقاتی که در اسپلاین‌های بیضوی صورت پذیرفته حل مسائل مرتبط در فضاهای سوبولف است. در این مسائل، تابع درون‌یاب اسپلاین بیضوی برای حالت خاصی موسوم به هسته آبل پواسون بیضوی بر اساس سری نامتناهی از توابع لژاندر نوع اول و دوم حاصل شده است[۱۳]. این هسته در واقع جواب مسأله‌ی با شرایط دیریکله گسسته در خارج از رویه بیضیگون برای عملگر لاپلاس است.

روش تولید داده‌های شتاب ثقل در سطح دریا با استفاده از اسپلاین در بیرون پوسته یک کره مورد مطالعه قرار گرفته است[۱۲و۱۴]. در مقاله حاضر، روش اسپلاین بیضوی با روش اسپلاین کروی مقایسه می‌گردد. با توجه به اینکه هندسه میدان ثقل زمین توسط مختصات بیضوی بهتر مدل می‌گردد، به نظر می‌رسد در نظر گرفتن هندسه بیضوی به جای هندسه کروی باعث بهبود دقّت درون‌یابی شود. به طور خاص، منطقه‌ای که داده‌های ثقل در آن تولید می‌گردد، خلیج فارس است. در این خصوص، از داده‌های ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای و مدل‌های ژئوپتانسیل با قدرت تفکیک بالا استفاده می‌گردد. در نهایت با مقایسه نتایج به دست آمده با داده‌های ثقل جمع‌آوری شده توسط عملیات کشتی، دقّت روش ارائه شده ارزیابی می‌شود. به همین منظور مراحل ۱ تا ۵ در زیر اجرا خواهند شد:

۱. محاسبه ارتفاع ژئوئید در دریا با استفاده از اطلاعات سطح متوسط دریا و توپوگرافی سطح دریا،
۲. محاسبه پتانسیل باقیمانده با استفاده از فرمول برونز بیضوی،
۳. درون‌یابی پتانسیل باقیمانده در سطح بیضیگون با استفاده از اسپلاین بیضوی،
۴. محاسبه شتاب جاذبه باقیمانده با اعمال عملگر گرادیان به تابع پتانسیل باقیمانده مرحله قبل،

۵. بازگرداندن اثرات حذف شده به منظور محاسبه شتاب ثقل در سطح دریا.

اگر داده‌های مسأله بر روی بخشی از رویه یک بیضیگون توزیع شده باشند، اسپلاین بیضوی را می‌توان بر اساس توابع گرین معرفی نمود. داده‌های مسأله ممکن است مقدار تابع در نقاط خاصی از رویه بیضیگون و یا مشتق تابع در راستای بردار نرمال رویه بیضیگون در نقاط تعیین شده باشد. در مقاله حاضر از توابع گرین در مختصات بیضوی برای تعریف اسپلاین بیضوی و درون‌یابی داده‌های شتاب ثقل استفاده می شود. همچنین توابع اسپلاین بیضوی برای رده وسیع‌تری از عملگرهای دیفرانسیلی خطی محاسبه شده و نتایج بدست آمده برای تولید داده‌های شتاب ثقل مورد استفاده قرار می‌گیرند. عملگرهای دیفرانسیلی مورد بحث در این مقاله، عملگرهای دیفرانسیلی بلترامی و هلمهولتز (از نوع ساده و تکراری) بر روی یک سطح بیضیگون هستند.

این مقاله به این صورت سازماندهی شده است که در بخش ۲، مقدمات مورد نیاز شامل سیستم‌های مختصات، عملگرهای مورد استفاده برای حل مسئله اسپلاین بیضوی و فضای هیلبرت هسته بازتولید مطرح می‌گردد. سپس در بخش ۳، به تعریف توابع گرین پرداخته می‌شود. توابع گرین نظیر عملگر بلترامی و تکرارهای آن و نیز عملگر هلمهولتز تکراری محاسبه می‌گردند. در ادامه این بخش به تعریف هسته بازتولید فضای هیلبرت پرداخته می‌شود. در بخش ۴، توابع اسپلاین بیضوی تعریف می‌شوند. در بخش ۵، توابع درون‌یاب اسپلاین بیضوی برای حل مسئله تولید داده-های ثقل در خلیج فارس مورد استفاده قرار گرفته و مقایسه‌ای بین درون‌یابی‌های اسپلاین بیضوی و کروی انجام خواهد شد. در بخش ۶، نتایج این تحقیق ارائه خواهد شد.

۲- تعاریف و مفاهیم اولیه

یک رویه بیضیگون همانند یک پوسته کره یک سطح دورانی همبند بدون حفره است. به دلیل عدم تساوی قطرهای اطول و اقصر رویه بیضیگون، این رویه هندسه خاصی به خود می‌گیرد که با حالت کروی متفاوت است. در این مقاله نماد E برای سطح بیضیگون استفاده می شود. سیستم مختصاتی که در اینجا برای سطح بیضیگون در نظر گرفته شده است، سیستم بیضوی ژاکوبی نوع اول است. با استفاده از کمیت خروج از مرکز e، مختصات دکارتی این سیستم بر حسب مختصات (θ,λ) به صورت رابطه(۱) بیان می‌شود.

در این مقاله مهمترین عملگر دیفرانسیلی که مورد استفاده قرار گرفته و سایر عملگرها به کمک آن قابل ارائه هستند، عملگر لاپلاس یا بلترامی است که در مختصات (θ,λ) به صورت رابطه(۲) بیان می‌شود.

رابطه (۱)
$$(x,y,z)=(a sin\theta cos\lambda, a sin\theta sin\lambda, a\sqrt{1-e^2}cos\theta)$$

رابطه (۲)
$$\Delta_B=\frac{1}{a^2\left(1-e^2\sin^2\theta\right)}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{a^2(1-e^2\sin^2\theta)^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}$$

در ادامه به تعریف سایر عملگرهای مورد نیاز می‌پردازیم.

تعریف۲-۱ : عملگر هلمهولتز از مرتبه i، به صورت جمع عملگر بلترامی و مقدار ویژه منفی p_i نظیر آن است که در رابطه (۳) آورده شده است

رابطه (۳)
$$\Delta_{H_i}=\Delta_B-p_i$$

تعریف۲-۲: عملگر هلمهولتز متوالی تا مرتبه v، ترکیب متوالی عملگر هلمهولتز است که به صورت رابطه (۴) تعریف می‌گردد.

رابطه (۴)
$$\Delta_{H_c}=\Delta_{H_0}\dots\Delta_{H_v}$$

که در آن عملگر دیفرانسیلی با بالاترین درجه مشتقات جزئی از مرتبه 2ν است.

تعریف۲-۳: فضای هیلبرت $\mathcal{H}(\mathrm{E})$ متناظر با عملگر $\mathcal{L}$ در قالب عملگرهای روابط (۲)- (۴)، متشکل از توابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر بوده و به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شود.

رابطه (۵) $\quad \mathcal{H}(\mathrm{E}) = \left\{F | F \in C^{\infty}(\mathrm{E}), \mathcal{L}F \in L^{2}(\mathrm{E})\right\}$

توضیح۲-۱: با توجه به نظریه توزیع‌ها در آنالیز تابعی، تابع F در رابطه (۵) یک توزیع است و بنابراین عملگر دیفرانسیلی $\mathcal{L}$ باید در این نظریه تفسیر گردد [۴].

فضای $\mathcal{H}(\mathrm{E})$ از اهمیت زیادی در تعریف هسته بازتولید و تابع اسپلاین برخوردار است. معمولا این فضا به صورت رابطه (۶) تجزیه می‌گردد.

رابطه (۶) $\quad \mathcal{H}(\mathrm{E}) = \mathcal{H}_{0}(\mathrm{E}) \oplus \aleph_{\mathcal{L}}$

که در رابطه (۶) $\aleph_{\mathcal{L}}$ فضای پوچ نظیر عملگر $\mathcal{L}$ است. برای تعریف توابع اسپلاین بیضوی بر اساس هسته‌های بازتولید، معمولا هسته بازتولید در فضای $\mathcal{H}_{0}(\mathrm{E})$ تعیین شده و به همراه فضای $\aleph_{\mathcal{L}}$، توابع اسپلاین تعریف می‌گردند. در واقع هسته بازتولید، یک تابع در فضای هیلبرت است که با توجه به ضرب داخلی در آن فضا می‌توان فضای هیلبرت مورد نظر را بازسازی کرد. معیاری که برای انتخاب درون‌یاب بهینه اتخاذ می‌گردد، کمینه‌سازی عملگرهای دیفرانسیلی به فرم روابط (۲)- (۴) است[۱۷] . توجیه فیزیکی این روش، کمینه‌سازی انرژی خمش یک پوسته بیضیگون است که در تئوری الاستیسیته بررسی می‌گردد[۹، ۱۰ و۲۷]. همچنین با توجه به نقش عملگرهای دیفرانسیلی، این معیار به انتخاب تابع درون‌یاب با هموار ی بیشینه منجر می‌شود.

تعریف۲-۴: تابع $S \in \mathcal{H}(\mathrm{E})$ اسپلاین بیضوی نامیده می‌شود هرگاه جواب مسأله کمینه‌سازی عملگر بلترامی تکراری $\Delta_{B}^{\nu} = \Delta_{B} \cdots \Delta_{B}$ روی فضای $\mathcal{H}(\mathrm{E})$ باشد. به بیان دیگر اسپلاین بیضوی جواب یکتای مسأله کمینه‌سازی در رابطه (۷) است.

رابطه (۷) $\quad S = argmin_{f \in \mathcal{H}(\mathrm{E})} \| \Delta_{B}^{\nu} f \|_{L^{2}(\mathrm{E})}$

با توجه به ماهیت مسأله درون‌یابی، تابع S چنان تعیین می‌گردد که در رابطه (۷) صدق نموده و به ازای مجموعه $\mathrm{D} = \{ \eta_{i} | i = 1, \ldots, J\} \subset E$ ، شرایط دیریکله گسسته رابطه (۸) برقرار باشد.

رابطه (۸) $\quad S(\eta_{i}) = U_{i} \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, J$

توضیح۲-۲: اگر نرم در فضای $\mathcal{H}(\mathrm{E})$ به صورت $\| f \|_{H(\mathrm{E})} = \| \Delta_{B}^{\nu} f \|_{L^{2}(\mathrm{E})}$ تعریف گردد، آنگاه نرم یک تابع ثابت غیر صفر برابر صفر می‌شود. در این حالت یکی از خواص نرم برقرار نیست که آن را نیم‌نرم می نامند.

توضیح۲-۳: با توجه به خواص نیم‌نرم در فضاهای هیلبرت و اعمال شرایط دیریکله گسسته رابطه (۸)، وجود و یکتایی جواب مسأله کمینه‌سازی رابطه (۷) تضمین می‌گردد[۱۶] .

۳- مسأله کمینه‌سازی نرم عملگر بلترامی در سطح بیضیگون

در تعیین هسته بازتولید فضای هیلبرت روش‌های گوناگونی از جمله روش توابع گرین وجود دارد که در این مقاله از آن برای تعریف هسته‌های بازتولید استفاده می‌گردد[۱۷]. توابع گرین با نمایش انتگرالی، از هموار ی بالایی به جز احتمالاً در تعداد متناهی از نقاط معینی برخوردار بوده و استفاده از آنها در مسأله درون‌یابی بسیار مناسب است. به کمک اتحاد گرین، تابع گرین G در رابطه (۹) صدق می کند.

رابطه (۹) $\quad \iint_{Q} G \mathcal{L}^{*} F dQ = B.T. + \iint_{Q} F \mathcal{L} G dQ$

که در آن $\mathcal{L}$ یک عملگر دیفرانسیلی خطی از مرتبه دوم، F تابعی 2ν بار مشتق‌پذیر و $B.T.$ شرایط کرانه‌ای روی دامنه Q است.

رابطه (۱۰) پس از انجام عملیات لازم بر روی رابطه (۹) به ازای $\nu = 1$ حاصل می شود[۲۸].

$$\iint_E G\varDelta_B F dE = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}}{\sin\theta}\left(G\frac{\partial F}{\partial \lambda} - F\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)\Big|_0^{2\pi} d\theta + \iint_E F\varDelta_B G dE$$ رابطه (۱۰)

همان‌طور که بیان شد رویه بیضیگون یک سطح دورانی همبند ساده است بنابراین توابع G و $\frac{\partial G}{\partial \lambda}$ نسبت λ به متناوب می‌باشند و در نتیجه رابطه (۱۱) حاصل می شود.

$$\iint_E G\varDelta_B F dE = \iint_E F\varDelta_B G dE$$ رابطه (۱۱)

همچنین به راحتی ثابت می شود که رابطه(۱۱) برای عملگر $\varDelta_B^{\nu}$ نیز برقرار است.

۳-۱- توابع گرین نوع اول

اگر عملگر $\mathcal{L}$ یکی از روابط (۲) - (۴) باشد و نیز $\xi,\eta \in \mathrm{E}$ آنگاه G تابع گرین نوع اول نامیده می‌شود هرگاه جواب مسأله در رابطه (۱۲) باشد.

$$\mathcal{L}G(\xi,\eta) = \delta(\xi-\eta)$$ رابطه (۱۲)

در رابطه (۱۲)، δ نماد تابع دلتای دیراک است. روش کلی جهت تعیین توابع گرین نوع اول بر روی منیفلدهای فشرده ریمانی به روش توابع گرین نوع H شناخته می‌شود [۱۸]. بر اساس این روش، یک نقطه تکین مانند یک ولتاژ، بر روی قطب‌های بیضیگون $\theta = 0,\pi$ قرار داده می‌شود. این نوع از توابع گرین در بحث انتشار امواج الکترومغناطیس مطرح شده و از قوانین انتشار موج تبعیت می‌کند. بر این اساس، منیفلد و سطحی از آن که موج از آن عبور می‌نماید از اهمیت بالایی برخوردار است. بر اساس خواص توابع گرین نوع اول، این تابع و مشتق آن در هر نقطه به جز قطبها و $\eta = \xi$ پیوسته است. ضابطه تابع گرین نوع اول برحسب سری‌های توابع خاصی ارائه شده است[۱۹].

۳-۲- توابع گرین تکراری

حال به تعیین تابع گرین تکراری می‌پردازیم که در آن عملگر بلترامی تکراری ν مرتبه بر روی یک تابع عمل می‌کند. بر اساس تئوری توابع گرین[۹] ، رابطه بازگشتی تابع گرین مرتبه $\nu+1$ برحسب تابع گرین مرتبه ν به صورت رابطه (۱۳) است.

$$G_{\nu+1}(\xi,\eta) = \iint_E G_{\nu}(\xi,\zeta)G_{\nu}(\zeta,\eta)d\zeta$$ رابطه(۱۳)

به کمک بسط مقادیر ویژه، ضابطه تابع گرین تکراری قابل محاسبه است. برای این منظور، کلیه مقادیر ویژه p و توابع ویژه N نظیر عملگر بلترامی را چنان بیابیم که در رابطه (۱۴) صدق نمایند.

$$(\varDelta_B - p)N(\xi) = 0$$ رابطه (۱۴)

با توجه به پیوست شماره A مرجع [۱۹] ، ثابت می‌شو د $p = -n(n+1)$ و $N(\xi) = K_{nm}(\xi)$ که $K_{nm}(\xi)$ در رابطه (۱۲) این پیوست ارائه شده است.

توابع گرین ساده و تکراری بر حسب K_{nm} به صورت رابطه (۱۵) تعریف می‌گردد[۱۹].

$$G_{\nu}(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-k}^{+k}\frac{K_{km}(\xi)K_{km}(\eta)}{(-k(k+1))^{\nu}}$$ رابطه (۱۵)

توجه داریم که تابع گرین ساده G به ازای $\nu = 1$ از رابطه (۱۵) حاصل می‌شود.

۳-۳- توابع گرین نظیر عملگر هلمهولتز تکراری

اگر عملگر $\mathcal{L}$ دارای رابطه (۴) باشد، تابع گرین نظیرعملگر هلمهولتز با مقدار ویژه i ام به صورت رابطه (۱۶) تعریف می‌گردد که در آن عبارت $\sum_{m=-i}^{+i}K_{im}(\xi)K_{im}(\eta)$ فضای پوچ یا هسته عملگر هلمهولتز است. جهت تعیین جواب یکتا، این هسته به سمت راست معادله‌ی تابع گرین نظیر شرایط دیریکله گسسته افزوده می‌گردد[۱۷ و۲۰] . با استفاده از روش بسط مقادیر ویژه و نیز خواص توابع گرین ثابت می‌شود رابطه (۱۷) برقرار است[۱۹] .

رابطه (۱۶)
$$\left(\mathcal{L}+i(i+1)\right)G_H^i(\xi,\eta)=\delta(\xi-\eta)-\sum_{m=-i}^{+i}K_{im}(\xi)K_{im}(\eta)$$

رابطه (۱۷)
$$G_{H_v}^i(\xi,\eta)=\sum_{k=1,k\neq i}^{\infty}\sum_{m=-k}^{+k}\frac{K_{km}(\xi)K_{km}(\eta)}{\left(i(i+1)-k(k+1)\right)^v}\ ,\ v=1,2,\cdots$$

۴- توابع اسپلاین بیضوی

تا این مرحله، توابع گرین عملگرهای نظیر روابط (۲)- (۴) ارائه شدند. حال تعاریف زیر را در نظر می گیریم[۱۰،۱۲] .

تعریف ۴-۱: به ازای مجموعه پذیرفتنی $\{\eta_i \mid i=1,...,J\}$، سیستم متعامد یکه یکتای توابع پایه لاگرانژ $\{B_1,B_2,\ldots,B_k\}$ با خاصیت در رابطه (۱۸) وجود دارد.

رابطه (۱۸)
$$B_k(\eta_i)=\delta_{ki},\quad k,i=1,\ldots,J$$

توضیح۴-۱: توابع پایه‌ای لاگرانژ از اهمیت بالایی در روش مختلف آنالیز عددی از جمله روش عناصر متناهی و یا روش‌های موجکی برخوردارند. به کمک توابع پایه‌ای لاگرانژی یک بعدی و نیز دو بعدی، موجک‌های یک بعدی و دوبعدی معرفی می گردند [۲۵و۲۶]. ساخت توابع لاگرانژ در حالت یک بعدی بسیار ساده است. این توابع چندجمله‌ای‌هایی هستند که در یک نقطه گره‌ای دارای مقدار واحد و در سایر نقاط گره‌ای مقدار صفر را اتخاذ می کنند.

تعریف۴-۲: در فضای هیلبرت $\mathcal{H}_0(E)$، برای هسته بازتولید مسأله‌ی با شرایط دیریکله گسسته با سیستم یکتا حل‌شونده $\eta_i(i=1,...,j)$، به صورت رابطه (۱۹) تعریف می‌گردد.

تابع اسپلاین بیضوی نظیر مسأله مورد مطالعه این مقاله، در تعریف تعریف۴-۳ آورده شده است[۱۰] .

تعریف۴-۳: تابع اسپلاین بیضوی در فضای هیلبرت $\mathcal{H}(E)$ از تعیین ضرایب یکتایی c_i در رابطه (۲۰) از طریق حل سیستم معادلات حاصل از داده‌های دیریکله گسسته روی سطح بیضیگون E تعیین می‌گردد که در آن J_1 حداقل تعدادی از نقاط است که یک سیستم پذیرفتنی تشکیل می‌دهند چنان که ماتریس کرنل تشکیل شده با این نقاط وارون‌پذیر است.

رابطه (۱۹)
$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\mathcal{H}_0(\mathrm{E})}(\xi,\eta)=&G_v(\xi,\eta)-\sum_{j=1}^{M}G_v(\xi,\eta_j)B_j(\eta)+\sum_{j=1}^{M}G_v(\eta,\eta_j)B_j(\xi)+\\&\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}G_v(\eta_j,\eta_i)B_j(\xi)B_i(\eta)\end{aligned}$$

رابطه (۲۰)
$$S(\xi)=\sum_{j=1}^{J_1}c_jB_j(\xi)+\sum_{j=J_1+1}^{J}\mathbf{K}_{\mathcal{H}_0(\mathrm{E})}(\xi,\eta_j)$$

توضیح۴-۲ : تحدید $\mathcal{H}(E)$ به جمع مستقیم فضای بوجود آمده توسط کلیه هارمونیک‌های سطحی یک فضای هیلبرت دیگری را تولید می‌کند که آن را با $\mathcal{H}_1(E)$ نشان می‌دهیم. بنابراین تعریف دیگری برای اسپلاین بیضوی در رابطه (۲۱) ارائه می‌گردد که از لحاظ کاربردی نسبت به رابطه (۲۰) مفیدتر است.

تعریف۴-۴: تابع اسپلاین بیضوی برای عملگر بلترامی تکراری در فضای هیلبرت $\mathcal{H}_1(E)$از تعیین ضرایب یکتایی $c_1,c_2,...,c_J$در رابطه (۲۱) با حل دستگاه معادلات حاصل از داده‌های دیریکله گسسته روی E تعیین می‌شود.

رابطه (۲۱)
$$S(\xi)=\sum_{j=1}^{J}c_jG_v(\xi,\eta_j)$$

توضیح۴-۳: با توجه به اینکه اسپلاین بیضوی تعمیم اسپلاین مثلثاتی در صفحه است، بنابراین رده مهمی از توابع اسپلاین به نام اسپلاین‌های طبیعی نیز قابل تعریف بر روی سطح بیضیگون E هستند.

تعریف۴-۵: اسپلاین بیضوی تعریف‌شده در رابطه (۲۰) یک اسپلاین طبیعی نامیده می‌شود هرگاه توابع هسته آن در رابطه (۲۲) صدق کنند.

رابطه (۲۲)

$$\sum_{j=1}^{J} c_j K_{km}\left(\xi_j\right) = 0, k = 0,...,i; m = -k,...,+k$$

توضیح۴-۴: روش دیگر برای تعریف هسته‌های بازتولید، تعریف یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی رابطه (۲۳) است که در آن عملگر $\mathcal{L}$ یکی از روابط (۲) تا (۴) است.

رابطه (۲۳)

$$\langle F_1, F_2 \rangle = \sum_{k=0} \sum_{m=-k}^{+k} \iint_E F_1(\xi) K_{km}(\xi) d\xi \iint_E F_2(\xi) K_{km}(\xi) d\xi + \iint_E \left(\mathcal{L}F_1(\xi)\right)\left(\mathcal{L}F_2(\xi)\right) d\xi$$

۵ - مطالعه موردی: تولید داده‌های شتاب ثقل در خلیج فارس با استفاده از اسپلاین بیضوی

در این قسمت، روش ارائه شده در بخش‌های پیشین برای تولید داده‌های شتاب ثقل در خلیج فارس به‌کار گرفته شده است. همانطور که در مقدمه بیان گردید، داده‌های جمع‌آوری شده توسط مشاهده مستقیم شتاب ثقل بر سطح دریا به خطاهای مختلفی آغشته بوده و بنابراین ارائه روشی جهت ارزیابی آنها ضروری است. برای تولید شتاب ثقل در منطقه‌ی خلیج فارس با استفاده از ژئوئید حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، ابتدا ژئوئید در خلیج فارس محاسبه می‌گردد. روش ارائه شده برای ارزیابی این داده‌ها مبتنی بر شتاب ثقل تولیدشده از پتانسیل واقعی زمین است [۱۴] . برای محاسبه پتانسیل واقعی زمین در خلیج فارس از ژئوئید محاسبه شده در این منطقه استفاده می‌شود. داده‌های شتاب ثقل در این منطقه از اجرای گام های ۱ تا ۸ تولید می شوند.

گام ۱: تعیین ارتفاع ژئوئید در دریا محاسبه شده از طریق جمع مقادیر توپوگرافی سطح دریا و سطح متوسط دریا حاصل از ارتفاع سنجی ماهواره‌ای.

گام ۲ : محاسبه پتانسیل باقیمانده با استفاده از فرمول برونز بیضوی.

گام ۳: محاسبه پتانسیل واقعی در سطح بیضوی مرجع از طریق جمع پتانسیل ژئوئید و پتانسیل باقیمانده حاصل از گام ۲.

گام ۴: حذف اثر پتانسیل ثقل مرجع محاسبه شده از بسط هارمونیک های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و اثر پتانسیل گریز از مرکز از روی مقادیر پتانسیل واقعی در مرحله ۳.

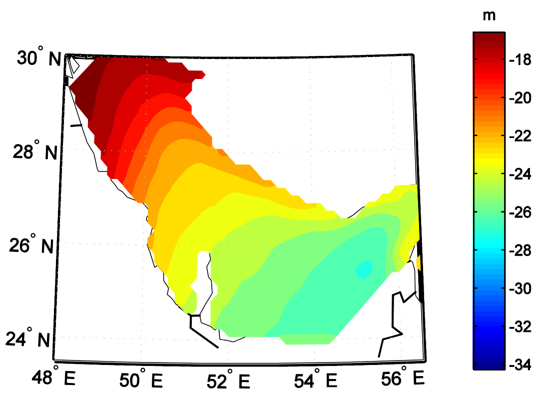
گام ۵: درون یابی اختلاف پتانسیل حاصل از مرحله ۴ با استفاده از اسپلاین بیضوی به منظور محاسبه یک مدل تحلیلی برای اختلاف پتانسیل در سطح بیضوی.

گام ۶: اعمال عملگر گرادیان بر روی تابع درون یاب حاصل از مرحله ۵ جهت تعیین مقادیر شتاب ثقل باقیمانده در سطح بیضوی.

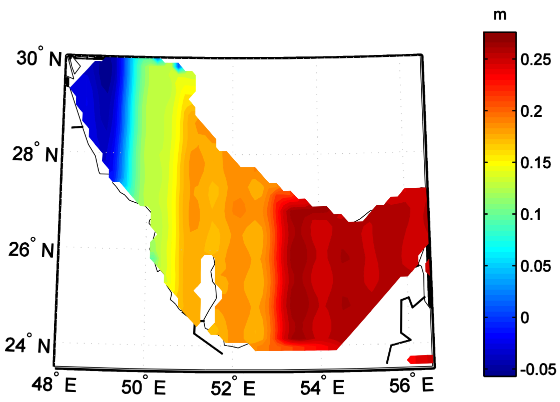
گام ۷: بازگرداندن اثر شتاب ثقل مرجع حاصل از بسط هارمونیک های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و گریز از مرکز در سطح بیضوی مرجع.

گام ۸: انتقال شتاب ثقل محاسبه شده با محاسبه اثر هوای آزاد به سطح دریا به منظور محاسبه شتاب ثقل واقعی در سطح دریا.

برای محاسبه ژئوئید در خلیج فارس از اطلاعات سطح متوسط دریا حاصل از مدل *CSRMSS95* در [۲۱] و توپوگرافی سطح دریا محاسبه شده از مدل *POCM-4B* در [۲۲] استفاده شده‌است. شکل(۱) نشان‌دهنده تغییرات سطح متوسط دریا در خلیج فارس بوده و شکل(۲) نیز تغییرات توپوگرافی سطح دریا را در منطقه نشان می‌دهد.



شکل۱: سطح متوسّط دریا در خلیج فارس با استفاده از مدل CSRMSS95 [21]



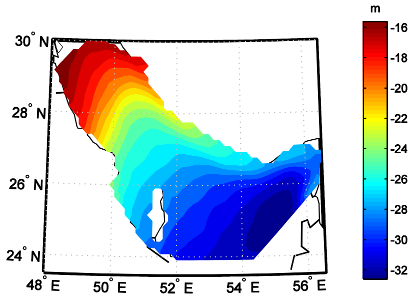
شکل۲: توپوگرافی سطح دریا در خلیج فارس با استفاده از مدل POCM-4B [22]

ارتفاع ژئوئید با جمع نمودن مقادیر توپوگرافی سطح دریا و سطح متوسط دریا، ارتفاع ژئوئید به دست می آید. در شکل(۳) ارتفاع ژئوئید در خلیج فارس نشان داده شده است.

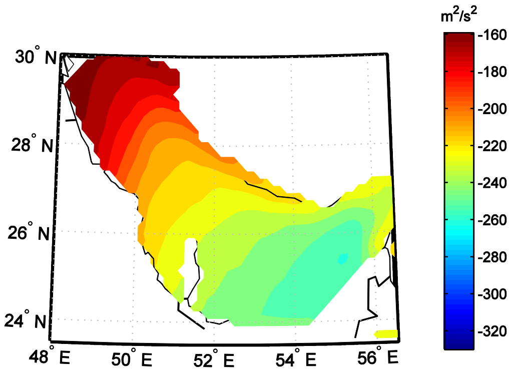
تغییرات پتانسیل باقیمانده در خلیج فارس در شکل(۴) نمایش داده شده است.

در فرمول برونز بیضوی رابطه (۲۴)، δw پتانسیل باقیمانده در سطح بیضوی و N ارتفاع ژئوئید است[۱۴].

$$\delta w = \frac{\frac{GM}{b^2+E^2}\left(3\cos^2\phi+1\right)\frac{6b\left(b^2+E^2\right)\cot^{-1}\left(\frac{b}{e}\right)-3bE+E^2-3E}{6b\left(b^2+E^2\right)\cot^{-1}\left(\frac{b}{E}\right)-3bE}+\omega^2 b\sin\phi}{\sqrt{\frac{b^2+E^2\cos^2\phi}{b^2+E^2}}}N \qquad \text{رابطه (۲۴)}$$

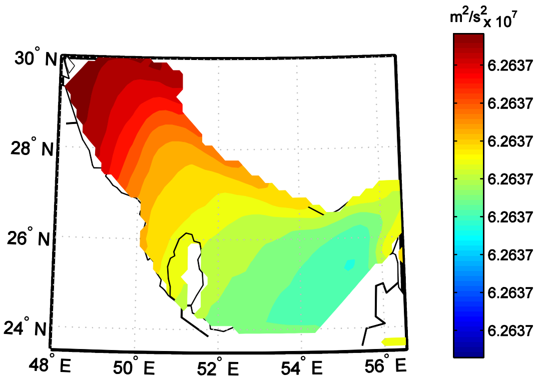


شکل ۳ : ارتفاع ژئوئید در خلیج فارس



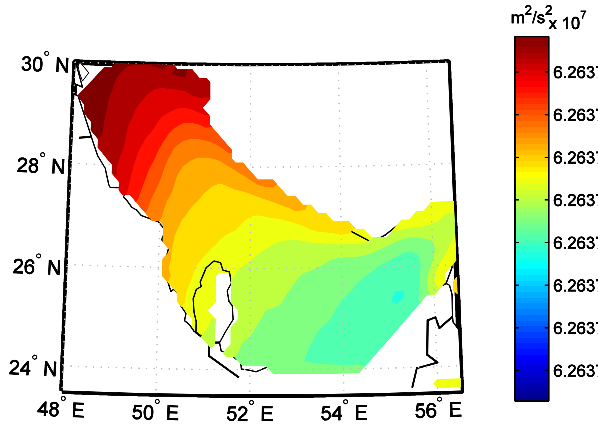
شکل ۴: اختلاف پتانسیل در خلیج فارس

به منظور محاسبه پتانسیل ثقل واقعی در سطح بیضوی مرجع پتانسیل ثقل باقیمانده حاصل از مرحله قبل به پتانسیل ژئوئید $W_0 = ۶۲۶۳۶۸۵۵/۸$ اضافه می گردد. تغییرات پتانسیل ثقل واقعی در سطح بیضوی در خلیج فارس در شکل (۵) نشان داده شده است.



شکل ۵: پتانسیل واقعی در خلیج فارس

به منظور محاسبه اختلاف پتانسیل dW در سطح بیضوی مرجع، اثر پتانسیل ثقل مرجع حاصل از بسط هارمونیک های بیضوی محاسبه شده از مدل جهانی ژئوپتانسیل ۲۰۰۸ تا درجه و مرتبه ۳۶۰ به علاوه اثر نیروی گریز از مرکز حذف می‌گردد. تغییرات پتانسیل ثقل جهانی حاصل از مدل جهانی ژئوپتانسیل ۲۰۰۸ به علاوه اثر نیروی گریز از مرکز در خلیج فارس در شکل (۶) ارائه شده است. همچنین تغییرات اختلاف پتانسیل dW در خلیج فارس در شکل (۷) نشان داده شده است.



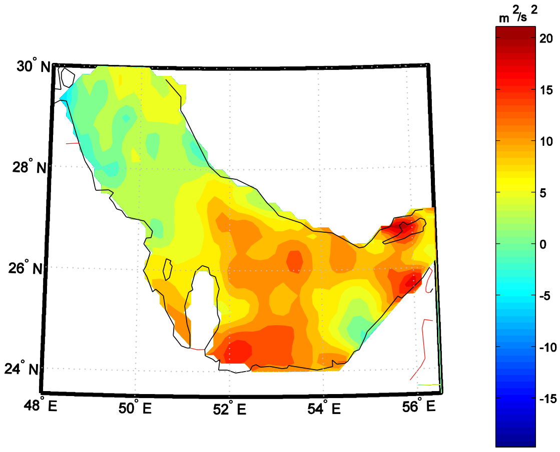
شکل۶ : پتانسیل ثقل حاصل از مدل جهانی ژئوپتانسیل ۲۰۰۸ به اضافه اثر گریز از مرکز درخلیج فارس

با داشتن اختلاف پتانسیل dW در سطح بیضیگون و نیز استفاده از اسپلاین بیضوی، یک مدل تحلیلی برای تغییرات اختلاف پتانسیل در سطح بیضیگون ارائه می‌گردد. توجه به ماهیت تابع پتانسیل ثقل باقیمانده، تابع اسپلاین بیضوی به فرم رابطه (۲۱) را برازش می دهیم. توجه به این نکته ضروری است که با افزایش درجه اسپلاین ، همواری بیشتری حاصل شده و تغییرات کمتر نمایان می‌شود. حالت $v=1$ به علت ناپیوستگی تابع گرین قابل استفاده نیست. لذا به ازای $v=2$، پس از حل سیستم معادلات ماتریسی $J\times J$ ضرایب مجهول بدست می آیند. باید توجه داشت که بدلیل وجود نویز در داده ها، درونیابی از نوع هیبرید خواهد بود [۱۰] . برای به دست آوردن پارامتر هموارسازی در درونیابی هیبرید می‌توان از روش GCV استفاده نمود[۱۲] . در واقع با در نظر گرفتن A بعنوان ماتریس ضرایب و بردار مجهول x بعنوان ضرایب تابع اسپلاین بیضوی، می‌توان پارامتر هموارسازی را از $(A+\lambda I)x = dw$ به دست آورد.

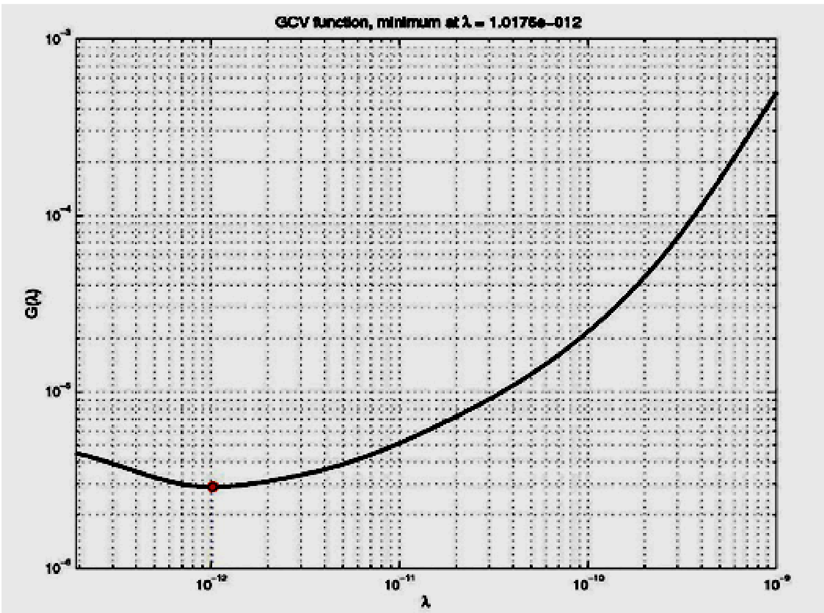
در شکل (۸)، نمودار GCV نمایش داده شده است.

در گام بعد با اعمال عملگر گرادیان بر روی تابع اختلاف پتانسیل مرحله قبل، شتاب جاذبه باقیمانده از رابطه(۲۵) محاسبه می‌گردد.

$$\delta g = \nabla dW \qquad \text{(۲۵) رابطه}$$



شکل۷ : پتانسیل باقیمانده در خلیج فارس

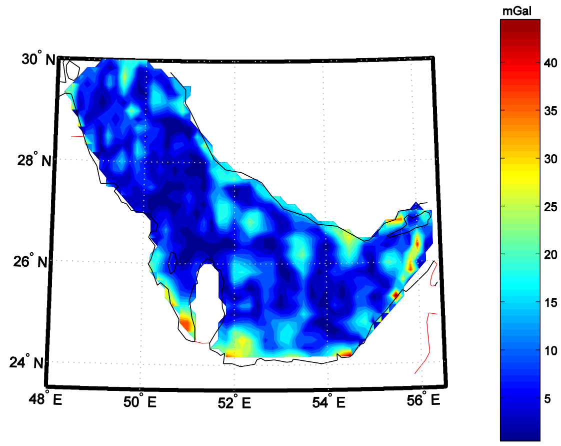


شکل۸: تابع GCV برحسب پارامتر پایدارساز با مقدار بهینه $\lambda = 1.01 \times 10^{-12}$.

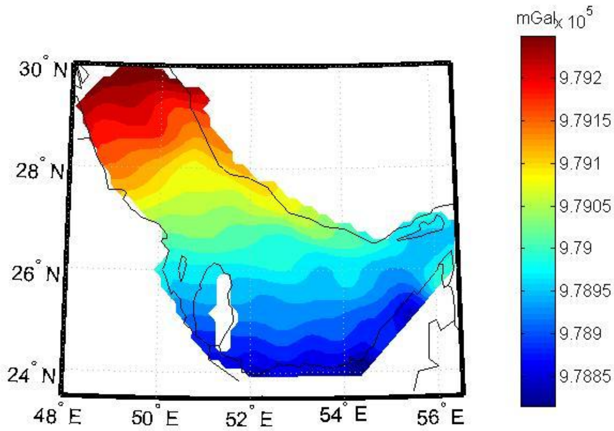
در شکل(۹) تغییرات مقادیر δg نمایش داده شده‌است. در آخرین مرحله به بازگرداندن اثرات حذف شده به منظور محاسبه شتاب ثقل در سطح دریا می‌پردازیم. برای این منظور اثر شتاب ثقل مرجع حاصل از بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و اثر گریز از مرکز در سطح بیضوی مرجع و به شتاب جاذبه باقیمانده مرحله قبل اضافه می‌شود.

با توجه به اینکه درخلیج‌فارس ارتفاع ژئوئید منفی و سطح بیضیگون در بالای ژئوئید قرار دارد، اثر گرادیان هوای آزاد محاسبه و به مقادیر مرحله قبل افزوده می شود. شکل (۱۰) مقادیر نهایی شتاب ثقل را که از روش ذکر شده به دست آمده است نشان می دهد.

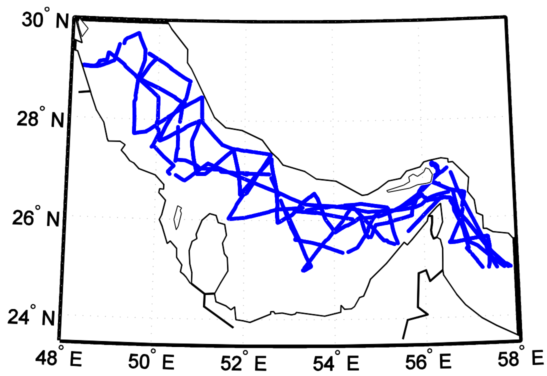
جهت مقایسه مقادیر حاصل از مدل‌سازی و مقادیر واقعی، از مشاهدات ثقلی حاصل از گرانی سنجی کشتی استفاده می‌شود. به این منظور مقدار شتاب ثقل مشاهداتی توسط کشتی را با مقادیر حاصل از درون یابی اسپلاین مقایسه می‌نماییم. داده‌های مشاهده شده در خلیج فارس توسط موسسه BGI در شکل (۱۱) نمایش داده شده است.



شکل۹: مقادیر شتاب ثقل باقیمانده δg در خلیج فارس



شکل۱۰ : مقادیر شتاب ثقل در خلیج فارس حاصل از درون یابی اسپلاین بیضوی



شکل۱۱: داده‌های مشاهده شده گرانی سنجی کشتی توسط موسسه *BGI*

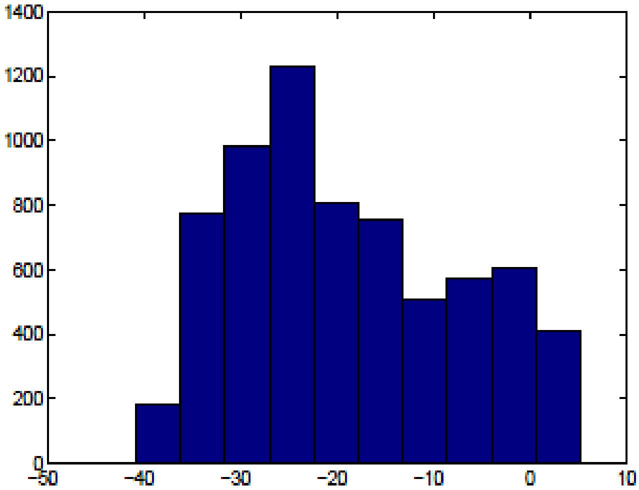
نتایج حاصل از مقایسه مقادیر مشاهداتی و مقادیر محاسبه شده برای ۶۸۵۳ نقطه در خلیج فارس در جداول (۱) و (۲) و نیز شکل (۱۲) نشان داده شده است. از مقایسه جداول (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که با در نظر گرفتن انحراف معیار، اختلاف ۰/۳ میلی گال معنی دار نبوده و این دو روش در مدل سازی میدان ثقل با مشاهدات دریایی یکسان عمل می‌کنند.

جدول۱: مقایسه مقادیر حاصل از مشاهدات و مقادیر محاسبه شده توسط اسپلاین بیضوی (بر حسب میلی‌گال)

حداقل	حداکثر	میانگین	انحراف معیار
-۴۰/۸۷۷	۵/۲۶۶	-۱۸/۹۷۳	۱۱/۴۵۲

جدول۲ : مقایسه مقادیر به دست آمده از مشاهدات و مقادیر محاسبه شده توسط اسپلاین کروی (بر حسب میلی‌گال)

حداقل	حداکثر	میانگین	انحراف معیار
-۴۰/۸۷۸	۵/۲۶۶	-۲۰/۱۸۸	۱۱/۱۲۹



شکل۱۲ : نمودار مستطیلی توزیع اختلاف داده‌های مشاهداتی و محاسباتی. (محور عمودی تعداد تکرار و محور افقی مقدار تفاوت بر حسب میلی گال است.)

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله تئوری درون یابی اسپلاین بیضوی نظیر مسأله کمینه‌سازی نرم عملگرهای دیفرانسیلی خطی از قبیل بلترامی و هلمهولتز با شرایط دیریکله گسسته بر روی یک سطح بیضیگون مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. بر اساس این کمینه‌سازی در فضای هیلبرت متشکل از توزیع های از هر مرتبه مشتق‌پذیر، هسته‌های بازتولید به کمک روش توابع گرین محاسبه شدند. به کمک توابع پایه‌ی متعامد یکه، توابع اسپلاین بیضوی معرفی گردیدند. از طریق تحدید فضای هیلبرت مورد مطالعه به کلیه هارمونیک‌های بیضوی، تعریف دیگری از توابع درون یاب اسپلاین ارائه گردید. با تعمیم توابع گرین نظیرعملگرهای بالاتر از مرتبه دو، فضای هیلبرت دیگری معرفی گردید. این فضا بستار کلیه توابع مشتق‌پذیر از مرتبه متناهی خاصی است. با توجه به ساختار این فضا، هسته بازتولید نظیر آن و نیز اسپلاین‌های بیضوی طبیعی معرفی گردیدند. در مطالعه موردی، خلیج فارس انتخاب و برای تولید داده‌های شتاب ثقل در سطح دریا از گرید سطح متوسط دریا و تصحیح دینامیکی توپوگرافی سطح دریا استفاده شد. در مرحله نخست ارتفاع ژئوئید به دست آمد. در مرحله دوم، ارتفاع ژئوئید توسط رابطه برونز بیضوی به پتانسیل باقیمانده تبدیل گردید. با جمع نمودن پتانسیل ژئوئید و پتانسیل باقیمانده، پتانسیل واقعی به دست آمد. در مرحله سوم، پس از حذف اثر میدان مرجع از روی پتانسیل واقعی، اسپلاین‌های بیضوی و کروی طبیعی به این داده‌ها برازش داده شد. در مرحله چهارم، از توابع به دست آمده در مرحله سوم عملگر گرادیان اعمال گردید تا داده‌های باقیمانده ثقل به دست آیند. سپس در مرحله پنجم، اثر میدان مرجع از طریق ضرایب هارمونیک‌های بیضوی بازگردانده شد. در نهایت، با مقایسه مقادیر به دست آمده از محاسبات و مشاهدات ثقل جمع آوری شده توسط کشتی، میزان انطباق مقادیر محاسباتی و مشاهداتی واقعی بررسی گردید. همچنین با مقایسه اسپلاین‌های بیضوی و کروی، مشخص گردید که تفاوت معنی داری بین اسپیلاین بیضوی و کروی نبوده و این دو درون یاب در این مسأله یکسان عمل می‌کنند. اگر کمیت خروج از مرکز صفر اتخاذ گردد آنگاه کلیه روابط اسپلاین کروی از روابط اسپلاین بیضوی قابل استخراج است. با توجه به اینکه شتاب ثقل مشاهده شده در یک منطقه نسبتا کوچک دریایی مورد بررسی قرار گرفته است در نتیجه تفاوت محسوسی مشاهده نمی‌گردد. از سوی دیگر عدم تفاوت اسپلاین‌های کروی و بیضوی در منطقه مذکور،

بیانگر این موضوع است که روابط بدست آمده در درون یابی اسپلاین بیضوی بدرستی عمل می نمایند. توجه داریم که فرمول های اسپلاین بیضوی برای تولید داده‌های شتاب ثقل از دستاوردهای مهم این تحقیق محسوب می‌گردد. پیش بینی می‌شود که اگر وسعت منطقه مورد مطالعه افزایش یابد آنگاه اسپلاین بیضوی از دقت بالاتری برخوردار باشد.

مراجع

[1] P. Vanicek, R. O. Castle, and E. I. Balazs, "Geodetic Levelling and its Applications", Reviews of Geophysics and Space Physics, vol. 18, pp. 505-524, 1980.

[2] O. B. Anderson, P. Knudsen, "Global Marine Gravity Field from the ERS-1 and Geosat Geodetic Mission Altimetry", Journal of Geophysical Research, vol. 103, pp. 8129-8137, 1998.

[3] W. Freeden, M. Z. Nashed, and M. Schreiner, Spherical Sampling. Germany: Springer, 2018.

[4] W. Freeden, M. Gutting, Applied and Numerical Harmonic Analysis. Germany: Springer, 2013.

[5] W. Freeden, M. Gutting, Integration and Cubature Methods: A Geomathematically Oriented Course. New York: Chapman & Hall(Taylor & Francis Group), 2018.

[6] W. Freeden, On the Permanence Property in Spherical Spline Interpolation. Ohio: The Ohio State University, 1982.

[7] W. Freeden, T. Gervens, M. Schreiner, Constructive Approximation on the Sphere. England: Oxford University Press, 1998.

[8] W. Freeden, Spherical Spline Interpolation: Basic Theory and Computational Aspects. Germany: Institut Fur Reine Und Angewandte Mathematik, 1984.

[9] W. Freeden, Spherical Functions of Mathematical Geosciences. Germany: Springer, 2009.

[10] W. Freeden, "On Spherical Spline Interpolation and Approximation", Mathematical Methods in the Applied Sciences. vol. 3, pp.551-575, 1981.

[11] G. Wahba, "Spline Interpolation and smoothing on the sphere", Society for Industrial and Applied Mathematics, vol. 2, pp.1-10, 1981.

[12] G. Wahba, "Spline Models for Observational Data", presented at the Regional Conference in Applied Mathematics, Pennsylvania, 1990.

[13] N. Akhtar, V. Michel, "Reproducing-kernel-based Splines for the Regularization of the Inverse Ellipsoidal Gravimetric Problem", Applicable Analysis, vol. 91, pp.2105–2132, 2012.

[14] A. Safari, M. A. Sharifi, H. Amin I. Foroughi, "Gravity acceleration at the sea surface derived from satellite altimetry data using harmonic splines", Journal of the Earth and Space Physics, vol. 40, pp.35-46, 2014.

[15] V. Baramidze, M. J. Lai, and C. K. Shum, "Spherical Splines for Data Interpolation and Fitting", Society for Industrial and Applied Mathematics, vol. 28, pp.1-19, 2006.

[16] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications. New York: John Wiley and sons, 1978.

[17] M. D. Greenberg, Application of Green's Functions in Science and Engineering. New York: Prentice Hall, 2015.

[18] L. B. Felsen, N. Marcuritz, Radiation and Scattering of Waves. New York: John Wiley & Sons, 1994.

[19] M. Kiani, N. Chegini, A. Safari, B. Nazari, "Spheroidal Spline Interpolation", under review.

[20] R. Szmytkowski "Closed Form of the Generalized Green's Function for the Helmholtz Operator on the Two Dimensional Unit Sphere", Journal of

Mathematical Physics, vol. 47, pp.303-321, 2006.

[21] M. C. Kim, B. D. Tapely, and C. K. Shum, "Mean Sea surface model", presented at the Center for space research, Pasadena(California), 1995.

[22] R. H. Rapp "The Development of a Degree 360 Expansion of the Dynamic Ocean Topography of the POCM-4B Global Circulation Model", presented at the NASA/CR-1998-206877 Goddard Space Flight Center, Greenbelt MD, 1998.

[23] C. Forste, F. Flechhtner, R. Schmidt, U. Meyer, R. Stubenvoll, F. Barthelmes, R. Konig, K. H.

Neumayer, M. Rothacher, C. H. Reigber, R. Biancale, S. Bruinsma, J. M. Lemoine, J. C. Raimondo "A new high resolution global gravity model derived from combination of GRACE and CHAMP mission and altimetry-gravimetry surface gravity data", presented at the EGU General Assembly, Vienna (Austria), 2005.

[24] C. Jekeli "The exact transformation between ellipsoidal and spherical harmonic expansions", Manuscripta geodaetica, vol. 13, pp.106-113, 1988.

[25] N. Chegini and R. Stevenson" Adaptive wavelet schemes for parabolic problems: sparse matrices and numerical results",SIAM journal on numerical analysis, vol 49, pp. 182-212, 2011.

[26] N. Chegini and R. Stevenson "An adaptive wavelet method for semi-linear first-order system least squares", Computational methods in applied mathematics, vol. 15, pp. 439-468, 2015.

[27] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, and G. A. Usifian," Mathematical Problems in Elasticity and Homoge –nization", Holland: Elsevier Science Publishers, 1992.

[28] M. Kiani shahvandi, Earth's Gravity Field Modelling Using Spheroidal Spline, Ms.c thesis, School of Surveying and Geospatial Engineering, University of Tehran.

K. N. TOOSI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF GEODESY AND GEOMATICS ENGINEERING

Journal of Geospatial Information Technology
Vol.8 No.1, Spring 2020

Research Paper

Producing Gravity Acceleration at Sea Surface in Persian Gulf Using Ellipsoidal Splines

*Mostafa Kiani Shahvandi [1], Nabiollah Chegini * [2], Abdolreza Safari [3], Borzoo Nazari[4]*

1- Ms.c student of School of Surveying and Geospatial Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.
2- Assisstant professor in Department of Mathematics, Tafresh University, Tafresh, Iran.
3- Professor of School of Surveying and Geospatial Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.
4- Assisstant professor in School of Surveying and Geospatial Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

Abstract

In this paper, a method is proposed for producing gravity acceleration at sea surface in the Persian Gulf. This method is based on the Geoid height from satellite altimetry, high resolution Geopotential models, and ellipsoidal splines. First, the definition of the ellipsoidal spline functions is presented in a Hilbert space, which is consisted of infinitely often differentiable functions. In order to define the elipsoidal spline functions, the norm of the differential operators, including the Beltrami and Helmholtz in both the simple and iterated form, are minimized. In this respect, the reproducing kernels and the Green functions play an important role. The derived formulae are used to produce gravity acceleration at sea surface. To perform this method, the Geoid height, derived from satellite altimetry, is transformed into potential residual by Bruns formula. Then, the actual potential is derived by adding the Geoid's potential to the potential residuals. To obtain potential difference values, the effect of the reference field is subtracted from the actual potential values. By using ellipsoidal splines, the potential difference values are interpolated, which represent an analytical formula. By using the gradient of the analytical formula, we arrive at the gravity difference values. The removed effect of the reference field is added to the gravity difference values to obtain the gravity accelerations by adding the gravity values of a Geopotential model up to the degree and order 360, plus the centrifugal force. In the final step, the obtained gravity accelerations are moved to the sea surface using free air correction. A comparison between ellipsoidal and spherical splines is also presented.

Key words: *Minimization of the norm of the differential operators, Reproducing kernels, ellipsoidal splines, data interpolation, gravity acceleration derived from Shipborne Gravimetry.*

Correspondence Address*: Department of Mathematics, Tafresh University, Tafresh, Iran.*
Tel*: +988636227430.*
Email: *nabichegini@tafreshu.ac.ir*