نشریه علمی مهندسی فناوری اطلاعات مکانی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده مهندسی نقشه برداری

سال دوازدهم، شماره نخست، بهار ۱۴۰۳
Vol.12, No.1, Spring 2024
۱ -۱٦

مقاله پژوهشی

# مدل‌سازی میدان گرانش محلی در قطب جنوب کرۀ ماه توسط داده‌های ماهوارۀ گریل

**محسن فیضی[1*]، مهدی روفیان نائینی[2]، مریم میری[3]**

۱- دانشجوی دکتری گروه ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۲- دانشیار گروه ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
-۳دانشجوی کارشناسی ارشد گروه ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۹/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۱/۲۳

## چکیده

در این مطالعه، مدل‌سازی استاتیک میدان گرانش ماه با استفاده از توابع هارمونیک محلی و مشاهدات مصنوعی مأموریت‌های اولیه و توسعه داده‌شده‌ی ماهواره‌ی گریل *(GRAIL)* و مدل جهانی *GL1500E* بررسی شده است. در این مدل‌سازی از مشاهدات سه‌ماهه ماهواره‌ی گریل برای تشکیل بردار مشاهدات استفاده شده است. مؤلفه‌ی مشاهداتی مورداستفاده در این تحقیق، اختلاف گرانش در امتداد خط دید زوج ماهواره *(LGD)* است. وجود میدان جاذبه زمین و اثر آن بر روی مدار دینامیکی ماهواره‌ی گریل، موجب دشواری در فرآیند مدل‌سازی میدان ثقل کره ماه می‌گردد. در این مطالعه با تشکیل معادله نرمال از طریق توابع پایه هارمونیک کلاه کروی اصلاح‌شده *(ASCH)* و حل مسئله معکوس، ضرایب مدل محلی ژئوپتانسیل به‌دست آمده است. در این مقاله، در حالت اول به مدل‌سازی میدان گرانش با داده‌های مأموریت اولیه (ارتفاع متوسط ۵۰ کیلومتر) پرداخته شده است. همچنین در حالت دوم، ضرایب ژئوپتانسیل با به‌کارگیری مشاهدات مأموریت توسعه داده‌شده‌ی گریل (ارتفاع متوسط ۲۰ کیلومتر) محاسبه و جهت بررسی صحت مدل از داده‌های مأموریت اولیه استفاده شده است. نتایج مدل ایجاد شده بر روی‌داده‌های مأموریت اولیه در نقاط کنترل برابر با ۰/۰۸ میکروگال و نتایج نقاط کنترل بر روی مشاهدات مأموریت توسعه داده شده برابر با ۰/۱۵ میکروگال به‌دست آمده است. به این صورت صحت‌سنجی مدل ژئوپتانسیل محلی صورت گرفته بروی قطب جنوب کره ماه تائید می‌شود و در روش بکارگیری شده با استفاده از تعداد ضرایب کمتر، دقت مکانی قابل قبولی از تغییرات میدان ثقل نسبت به مدل‌های ژئوپتانسیل با درجه و مرتبه بالا همچون *GL1500E* ارائه می‌کند.

**کلیدواژه‌ها :** هارمونیک کلاه کروی اصلاح‌شده، میدان گرانش محلی، مدل ژئوپتانسیل.

[*] نویسنده مکاتبه کننده: تهران، خیابان ولیعصر، تقاطع میرداماد، روبروی ساختمان اسکان، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی.
تلفن: ۹۸۹۳۳۴۴۳۸۳۸۶+

*Email: mfeizi@mail.kntu.ac.ir*

## ۱- مقدمه

در حدود بیش از سیصد سال پیش نیوتون[1] به موضوع گرانش و قانون گرانش پرداخت. بر اساس قانون گرانش نیوتون، نیروی گرانش متناسب با جرم دو جسم و با عکس مجذور فاصله‌ی آن دو رابطه دارد و بر خط واصل دو جسم اعمال می‌شود [۱]. حال وقتی صحبت از یک جسم در فضا می‌باشد، چیزی به نام میدان نیروی گرانشی قابل‌تعریف است. بنابراین، یک جسم جذب‌کننده میدان نیروی گرانش را تعیین می‌نماید [۲]. مدل‌سازی میدان گرانش یکی از مسائل کلاسیک ژئودزی است که از دیرباز موردتوجه محققین این حوزه بوده است و در طول دهه‌ی گذشته پیشرفت‌های قابل‌توجهی در بهبود مدل‌های گرانشی زمین و سیارات زمینی صورت گرفته است. اطلاع از رفتار میدان گرانشی، در کاربردهای متنوعی همچون تعیین مدار ماهواره‌ها، ناوبری، کشف معادن با شناسایی ساختار زمین به‌کاررفته و حتی گسترش آن در سیارات دیگر سبب شده است که تکنیک‌های حل و روش‌های مختلف اندازه‌گیری به‌منظور مدل‌سازی میدان گرانش در مقیاس‌های جهانی و محلی ارائه گردد [۳].

ازآنجاکه داده‌های گرانشی درگذشته به‌صورت اندازه‌گیری‌های گرانش سطحی و اندازه‌گیری‌های ارتفاعی بوده، پس با استفاده از این داده‌ها عمدتاً به مدل‌سازی در منطقه‌ی خاصی از سطح زمین و ایجاد مدل‌های میدان گرانش به‌صورت محلی پرداخته‌شده است. با توسعه‌ی فن‌آوری‌های ماهواره‌ای، مدل‌سازی میدان گرانش و تعیین ضرایب مدل با پوشش جهانی امکان‌پذیر شده است. با توجه به پوشش مشاهدات ماهواره‌ای و نحوه‌ی اندازه‌گیری آنها، امکان مدل‌سازی میدان گرانش در مقیاس جهانی فراهم گردید و نخستین مدل‌های ژئوپتانسیل ارائه شدند. این مدل‌های میدان گرانش به کمک حل مسئله‌ی مقدار مرزی *(BVP)*[2]پتانسیل گرانشی در فضای بیرونی جسم، به‌صورت معادله‌ی لاپلاس به وجود آمده است. هدف از حل معادله‌ی لاپلاس یافتن تابعی هارمونیک با استفاده از مقادیر معلوم بر روی مرزی مشخص است. ازآنجاکه پتانسیل گرانشی در خارج از یک جسم دلخواه یک تابع هارمونیک می‌باشد، می‌توان آن را به‌صورت بسط به سری هارمونیک‌های کروی نمایش داد.

امروزه علاوه بر زمین، مدل‌های گرانشی نسبتاً دقیق برای ماه، زهره[3] و مریخ[4] نیز ایجادشده است، که در بین اجرام سماوی، ماه به‌عنوان تنها ماهواره‌ی طبیعی زمین و نزدیک‌ترین همسایه در منظومه‌ی شمسی برای ما از اهمیت بیشتری برخوردار است. محققان ناسا بر مبنای مشاهدات شکل‌گرفته در ماه، وجود میزانی یخ در دهانه‌ی شاکلتن[5] ماه را تا حد زیادی احتمال می‌دهند. این یخ‌ها در دهانه‌ی شاکلتن واقع در بخش قطب جنوبی ماه، جایی که دما حداکثر منفی *157* درجه‌ی سانتی‌گراد است، قرار دارند. دلیل این مسئله نیز انحناء بسیار کوچک محور چرخش ماه می‌باشد، که سبب شده نور خورشید هرگز به این مناطق نرسد [۴]. همچنین برخلاف زمین، ماه تاریخچه‌ی چهار ونیم میلیارد سالی منظومه‌ی شمسی را در خود حفظ کرده است، که با کمک ساختار و ترکیب درونی ماه می‌توان به بازسازی این تاریخ کمک نمود [۵]. درنتیجه استفاده از مدل‌های دقیق میدان گرانش در قطب جنوب ماه، می‌تواند اطلاعات ارزشمندی در مورد وجود آب و همچنین نحوه‌ی تکامل و تاریخچه‌ی ماه و حتی منظومه‌ی شمسی در اختیار ما قرار دهد. مدل‌های گرانشی ذکرشده و هارمونیک‌های کروی در مطالعات جهانی دارای دقت و وضوح‌بالایی در بازسازی طول‌موج‌های بالای میدان گرانش هستند، ولی جهت استخراج فرکانس‌های بالا در کاربردهای محلی نیاز به

---

[1] *Sir Isaac Newton (1642-1727)*

[2] *Boundary Value Problem*

[3] *Venus*

[4] *mars*

[5] *Shackleton*

استفاده از توابع پایه محلی است.

در حالتی که هدف مدل‌سازی محلی میدان ثقل باشد، می‌توان هارمونیک‌های کروی را به شکلی تعریف نمود که بر روی یک کلاهک کروی متعامد شوند. این ایده نخستین بار توسط هینز[1] (۱۹۸۵) با نام هارمونیک کلاه کروی *(SCH)*[2] ارائه گردید [۶]. این روش شامل اعمال مستقیم شرایط مرزی بر روی کلاهک و استفاده از توابع لژاندر با درجه‌ی حقیقی و مرتبه‌ی صحیح می‌باشد. هینز (۱۹۸۵) از این روش نخستین بار جهت مدل‌سازی محلی میدان مغناطیسی در کانادا استفاده نموده است [۷]. مدل‌سازی‌های میدان گرانش قابل‌اعتمادی از این روش نیز به‌عمل‌آمده که اولین به‌کارگیری در این زمینه در سال (۱۹۹۵) شکل‌گرفته است [۸]. دی سنتیس[3] (۱۹۹۲) جهت بهبود روش هارمونیک کلاه کروی، استفاده از هارمونیک‌های کروی با استفاده از درجات صحیح را به کمک مقیاس بندی داده‌های کلاهک کروی و قرار دادن بر روی یک نیم‌کره پیشنهاد کرد. این روش با نام آنالیز هارمونیک‌های کلاه کروی اصلاح‌شده *(ASCH)*[4] ارائه‌شده است [۹]. هان (۲۰۰۸) جهت نمایش میدان گرانش محلی در ماه، توابع پایه اسلپین کروی[5] را بکار گرفت. این توابع پایه به‌صورت ترکیب خطی هارمونیک‌های کروی استاندارد نمایش داده می‌شوند. نتایج کار را نیز با آخرین‌مدل‌های گرانش جهانی و همچنین داده‌های توپوگرافی مستقل مقایسه شده است. با کمک این توابع، امکان ساخت میدان گرانشی سمت نزدیک ماه با وضوح‌بالا و در سمت دور ماه با وضوح پایین به‌طور همزمان وجود دارد [۱۰]. گوسنز و همکاران (۲۰۱۲)، توابع پایه اسلپین مورداستفاده در مطالعه‌ی هان [۱۰] را برای ایجاد مدل گرانش محلی بکار گرفته است[۱۱]. یونس (۲۰۱۳) برای مدل‌سازی میدان گرانش از مشاهدات محلی میدان گرانش ایجادشده در آلمان به کمک مدل‌های جهانی و هارمونیک کروی اصلاح‌شده مورداستفاده قرار داده است. و این روش را برای مدل‌سازی پتانسیل گرانشی، محاسبات شبه‌ژئوئیدی و ژئوئیدی به‌صورت منطقه‌ای و با دقت بالا مناسب دانست [۱۲]. فیضی و رئوفیان نائینی (۲۰۱۷) با شبیه‌سازی مشاهدات ثقل سنجی هوایی منطقه‌ی شمال غرب ایران و به کمک هارمونیک کروی اصلاح‌شده، به مدل‌سازی میدان گرانش محلی در راستای شعاعی پرداخته و برای بررسی نتایج از نقاط کنترل استفاده کرده است [۱۳]. فیضی و رئوفیان نائینی (۲۰۱۸) با استفاده از داده‌های گرانش هوایی بر روی کشور تانزانیا، دقت دو روش هارمونیک کروی اصلاح‌شده و هارمونیک مستطیلی[6] را مقایسه نمودند [۱۴].

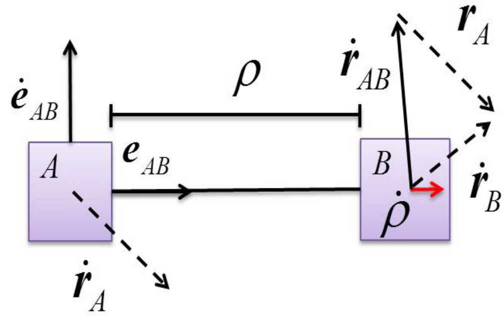
## ۲- میدان گرانش ماه

تعیین ساختار و ترکیب درونی ماه، نیازمند دانش دقیقی از میدان گرانش ماه است که در مأموریت‌های ماهواره‌ای مختلف موردتوجه قرارگرفته است. تلاش‌های اولیه برای ایجاد مدل گرانشی ماه با مأموریت لونا-۱۰[7] در سال ۱۹۶۶ آغاز شد [۱۵]. پس‌ازآن با ارسال ۵ ماهواره‌ی مدارگرد ماه[8] و شش فرود موفقیت‌آمیز برنامه‌ی آپولو[9] ادامه یافت. مدل‌های میدان گرانش ماه با داده‌های مأموریت کلمنتاین،[10] کاوشگر ماه *(LP)*[11] و چانگ‌ای-۱[12] تا حدود بسیار زیادی بهبود نمود. دسترسی مستقیم و مدل‌سازی میدان گرانش بخش دور ماه، توسط مأموریت سلن[13] امکان‌پذیر گردید[۱۶].

---

1 *G. Haines*
2 *Spherical Cap Harmonics*
3 *De Santis*
4 *Adjusted Spherical Harmonic Analysis*
5 *spherical Slepian*
6 *Rectangular harmonic*
7 *luna-10*
8 *Lunar Orbiters*
9 *Apollo*
10 *Clementine*
11 *lunar prospector*
12 *Chang'e-1*
13 *SELENE*

در بین این مأموریت‌ها، ماهواره‌ی ثقل سنجی گریل[1] توانسته دقیق‌ترین نقشه‌ی گرانشی ماه با وضوح‌بالا را تا به امروز ارائه دهد. تا قبل از گریل، مدل‌های گرانشی ماه با توجه به اینکه همواره یک سمت ماه به‌سوی زمین است (قفل جزرومدی ماه) و عدم امکان ردیابی مستقیم ماهواره، بیشتر سمت نزدیک ماه را شامل می‌شدند [۱۷]. فاصله‌ی نسبی زوج ماهواره‌ی گریل با فرآیند علمی مشابه مأموریت گریس[2]به ویژگی‌های میدان گرانش منطقه‌ی در حال عبور وابسته است [۱۸]. برای اندازه‌گیری دقیق فاصله‌ی نسبی زوج ماهواره‌ی گریل، در هر ماهواره سیستم فاصله‌یاب گرانشی ماه *(LGRS)*[1]قرارگرفته است. این سیستم از طریق اختلاف فرکانس دریافتی و ارسالی سیگنال‌های رادیویی باند *K*[1]این فاصله را محاسبه می‌نماید [۱۹]. هندسه‌ی قرارگیری دو ماهواره‌ی ارتفاع پایین مأموریت گریل در شکل (۱) نمایش داده شده است.




**شکل ۱: هندسهٔ دو ماهوارهٔ ارتفاع پایین [۲۰]**

با توجه به شکل (۱)، $e_{AB}$ بردار واحد در امتداد خط دید دو ماهواره‌ی *A* و *B* است. $\rho$ فاصله نسبی بین زوج ماهواره که با استفاده از اختلاف بردارهای موقعیت دو ماهواره ( $\mathbf{r}_{AB}$) به‌صورت رابطه (۱) ایجاد می‌شود.

رابطه(۱)
$$\rho = \mathbf{e}_{AB} . \mathbf{r}_{AB}$$

همچنین $\dot{\rho}$ تغییرات فاصلهٔ نسبی (سرعت نسبی دو ماهواره) دو ماهوارهٔ *A* و *B* که از طریق مشتق فاصله دو ماهواره طبق رابطه (۲) قابل‌محاسبه است:

رابطه(۲)
$$\dot{\rho} = \dot{\mathbf{r}}_{AB} . \mathbf{e}_{AB}$$

همان‌طور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود، بردار تغییرات فاصله‌ی نسبی دو ماهواره (بردار سرعت نسبی دو ماهواره) $\dot{\mathbf{r}}_{AB}$ ، همان اختلاف بردار سرعت ماهواره اول $\dot{\mathbf{r}}_{A}$ و دوم $\dot{\mathbf{r}}_{B}$ است.

بردار اختلاف شتاب در امتداد خط دید بین دو ماهواره *LL-SST*[3]به‌صورت رابطهٔ (۳) قابل نمایش است:

رابطه(۳)
$$g_{AB}^{LOS} = \ddot{\rho} - \frac{1}{\rho}\left(\left|\dot{\mathbf{r}}_{AB}\right| - \dot{\rho}^2\right)$$

داده‌های اولیه گریل به‌صورت خام و پردازش نشده است، که با اعمال پردازش‌های لازم بر روی آن، داده‌های سطح یک، *A-1* و *B-1* را ایجاد می‌نماید. داده‌های سطح یک شامل شتاب‌های غیر جاذبی، داده‌های تعیین موقعیت، فاصله‌ی بین دو ماهواره و تغییرات آن است. داده‌های سطح بالاتر که در اثر پردازش‌هایی بر روی‌داده‌های سطح یک ایجاد می‌شوند شامل ضرایب هارمونیک میدان گرانشی است که توسط *PDS*[4]بایگانی می‌شوند [۵].

## ۳- مدل‌سازی میدان گرانش به روش هارمونیک‌های کلاه کروی

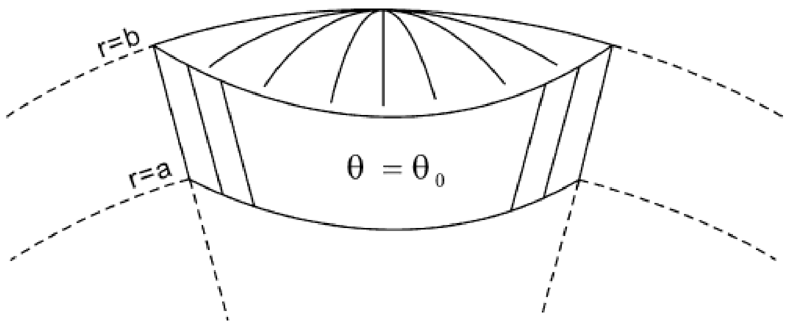
درروش *SCH* حل مسئله مقدار مرزی معادله لاپلاس به‌صورت محلی انجام می‌شود، یعنی به‌جای آن‌که اطلاعات در کل کره‌ی زمین در دست باشد، فرض می‌شود که اطلاعات گرانشی بر محدوده‌ای از زمین به‌عنوان نمونه به شکل کلاهک کروی، در اختیار است. منطقه‌ی موردنظر به‌وسیلهٔ کلاهک کروی با زاویه‌ی θ و فاصله‌ی شعاعی *r=a* و *r=b* مطابق شکل (۲) پوشش داده شده است [۶].

این کلاهک تعریف‌شده برای منطقه‌ای قابل‌استفاده است که بر قطب کلاهک منطبق باشد، در غیر این

[1] *GRAIL: Gravity Recovery and Interior Laboratory*
[2] *GRACE: Gravity Recovery and Climate Experiment*
[3] *Low-Low Satellite to Satellite Tracking*
[4] *Planetary Data System*

صورت، می‌توان سیستم کروی معمولی $(r,\theta,\lambda)$ را به یک سیستم با محوریت کلاهک کروی که از مرکز منطقه‌ی موردنظر عبور می‌نماید $(r,\psi,a)$، دوران داد، این تبدیل سیستم مختصات از طریق رابطه(۴) امکان‌پذیر است[۲۱]. در رابطه (۴) $\theta_p$ و $\lambda_p$ موقعیت مرکز منطقه موردمطالعه و $a$ و $\psi$ نیز به ترتیب آزیموت و فاصله‌ی کروی نقاط کلاهک در سیستم مختصات با قطب جدید می‌باشند.

جهت حل معادله‌ی لاپلاس در سیستم مختصات کروی به روش جداسازی، می‌بایست مقادیر ویژه‌ی موجود را با تعریف شرایط مرزی تعیین نمود. درنتیجه، پتانسیل گرانشی $V$ حاصل از حل معادله‌ی لاپلاس با برقراری شرایط مرزی در محدوده‌ی کلاهک کروی شکل به‌صورت رابطه(۵) است [۶].




**شکل ۲: شکل نمایش‌دهنده کلاهک کروی [۶]**

رابطه(۴)

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\theta)\sin(\lambda-\lambda_P)}{\sin(\lambda_P)\cos(\theta)-\cos(\theta_P)\sin(\theta)\cos(\lambda-\lambda_P)}$$

$$\cos(\psi) = \cos(\theta_P)\cos(\theta)+\sin(\theta_P)\sin(\theta)\cos(\lambda-\lambda_P)$$

رابطه(۵)

$$V(r,\theta,\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty} R\left(\frac{R}{r}\right)^{n_k(m)+1}(g_k^m \cos m\lambda + h_k^m \sin m\lambda)P_{n_k(m)}^m(\cos\theta)$$

در رابطه (۵)، $\theta$ متمم عرض جغرافیایی، $\lambda$ طول جغرافیایی، $R$ شعاع کرهٔ مرجع و پتانسیل روی آن گسترش می‌یابد. $P_{n_k(m)}^m(.)$ تابع لژاندر با درجه حقیقی و مرتبه صحیح می‌باشد. $h_k^m$ و $g_k^m$ ضرایب هارمونیک‌های کلاه کروی هستند. درجه‌ی تابع که با $n_k(m)$ نشان داده شده است از طریق حل روابط (۶) قابل محاسبه است [۶]. در رابطه (۶)، $\theta_0$ نصف زاویه کلاهک کروی تعریف شده بر منطقه موردنظر است.

رابطه(۶)

$$V(r,\theta_0,\lambda) = 0$$

$$\left.\frac{\partial V(r,\theta,\lambda)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = 0$$

پس از محاسبهٔ پتانسیل گرانشی، با محاسبه گرادیان این تابع اسکالر می‌توان به‌شتاب گرانشی دست پیدا نمود. مؤلفه‌های شتاب گرانشی با استفاده از روابط (۷) حاصل خواهد شد [۶].

رابطه(۷)

$$g_{\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial V\,(r,\theta,\lambda)}{\partial\theta}$$
$$g_{\lambda}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V\,(r,\theta,\lambda)}{\partial\lambda}$$
$$g_{r}=-\frac{\partial V\,(r,\theta,\lambda)}{\partial r}$$

مزیت روش هارمونیک‌های کلاه کروی نسبت به هارمونیک‌های معمولی این است که تعداد ضرایب لازم برای وضوح خاص در یک محدودهٔ کلاهک کروی کمتر از هارمونیک‌های کروی معمولی در همان وضوح موردنیاز است. این تکنیک به‌طور گسترده در مدل‌سازی میدان مغناطیسی و میدان گرانشی به‌کاررفته است. در این روش محاسبات مربوط به توابع لژاندر، بدون استفاده از فرمول بازگشتی و به‌کارگیری تقریب‌ها، فرآیندی زمان‌بر می‌باشد [۷].

دی سنتیس (۱۹۹۲) جهت بهبود روش هینز، استفاده از توابع لژاندر با درجه و مرتبه صحیح به‌جای توابع لژاندر با درجه غیر صحیح را به کمک مقیاس بندی داده‌های کلاهک کروی پیشنهاد کرد. این روش که هارمونیک‌های کروی اصلاح‌شده *(ASCH)* نام دارد، برای کلاهک‌هایی که خیلی بزرگ نیستند قابل به‌کارگیری است. لازمه‌ی استفاده از این روش و به‌تبع آن به‌کارگیری توابع لژاندر با درجه و مرتبه‌ی صحیح، مقیاس نمودن داده‌ها در بازه‌ی صفرتا $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد. این کار با تبدیل از یک سیستم کلاهک کروی $(r,\theta,\lambda)$ به یک سیستم نیمکره‌ی جدید $(r',\theta',\lambda')$ توسط روابط (۸) امکان‌پذیر است[۹].

رابطه(۸)

$$r'=r$$
$$\lambda'=\lambda$$
$$\theta'=S.\theta$$

در رابطه (۸)، $s=\frac{\pi}{2.\theta_0}$ مقیاس، $\theta_0$ نصف زاویه کلاهک، $r$ و $r'$ فاصله شعاعی، $\lambda$ و $\lambda'$ طول جغرافیایی در سیستم‌های مرجع قدیم و جدید می‌باشند.

با بزرگ کردن مصنوعی کلاهک به یک نیمکره، پتانسیل گرانشی به شکل رابطه (۹) بیان می‌شود [۹]. در رابطه (۹)، $P_{km}(.)$ تابع لژاندر با درجه و مرتبه‌ی صحیح، $C_k^m$ و $S_k^m$ ضرایب روش *ASCH* هستند. $n_k$ درجه‌ی رابطه (۹) با استفاده از رابطه (۱۰) به دست می‌آید [۹]. درنهایت می‌بایست به سیستم اصلی بازگشت که با تبدیل معکوس و استفاده از مقیاس امکان‌پذیر است. با توجه به روابط (۸)، مؤلفه‌های شتاب گرانش به شکل روابط (۱۱) خواهد شد [۲۲]:

در هارمونیک‌های کروی اصلاح‌شده برخلاف روش هارمونیک‌های کلاه کروی، دیگر نیازی به محاسبه‌ی ریشه‌های تابع لژاندر و مشتقات آن نیست و تابع لژاندر به‌راحتی با استفاده از فرمول‌های بازگشتی و بدون نیاز به راه‌حل‌های پیچیده و تکراری قابل‌محاسبه است.

رابطه(۹)

$$V\,(r',\theta',\lambda')=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\left(\frac{R}{r'}\right)^{n_k+1}(\mathrm{C}_k^m\cos m\lambda'+S_k^m\sin m\lambda')P_k^m(\cos\theta')$$

رابطه(۱۰)

$$n_k=\sqrt{S^2k\,(k+1)+0.25}-0.5$$

رابطـــه(۱۱)

$$g_{\theta'}^{ASCH}=\frac{g_{\theta}}{S},$$
$$g_{\lambda'}^{ASCH}=g_{\lambda}\times\frac{\sin(\theta_0)}{\sin(S\,\theta_0)},$$
$$g_{r'}^{ASCH}=g_{r}$$

### ۳-۱- تشکیل معادله نرمال بر اساس مشاهدات LGD و تابع هارمونیک ASCH

جهت دست‌یابی به بردار گرانش ماهواره، لازم است از تابع پتانسیل به شکل رابطه (۱۲) مشتق‌گیری انجام شود. بردارهای پایه و مؤلفه‌های بردار میدان گرانش در سیستم مختصات کلاهک کروی پوشش داده شده در منطقه موردنظر، تعریف شده است.

مؤلفه‌های شتابگرانش ذکرشده، به کمک جایگذاری رابطه (۹) در روابط (۷)، به شکل روابط (۱۳) حاصل خواهد شد. همچنین برای محاسبه بردارهای پایه می‌توان از روابط(۱۴) استفاده نمود.

با توجه به آنکه ماهواره‌ی گریل مقدار اختلاف گرانش بین دو ماهواره‌ی $A$ و $B$ را که در امتداد خط دید دو ماهواره *LOS* (*Line Of Sight*) تصویر شده است اندازه‌گیری می‌نماید، بنابراین برای این اختلاف گرانش معادله رابطه (۱۵) را داریم. در رابطه (۱۵)، اختلاف شتاب گرانش زوج ماهواره‌ی گریل *(LGD)* ( *Line of sight gravity difference*) نیازمند محاسبه بردارهای شتاب گرانش $\boldsymbol{g}_A$ و $\boldsymbol{g}_B$ به کمک رابطه (۱۳) و همچنین ضرب داخلی بردار واحد هر ماهواره در بردار واحد خط واصل دو ماهواره است که به‌صورت رابطه (۱۶) انجام می‌شود.

با جایگذاری روابط ذکرشده در رابطه (۱۵) می‌توان این رابطه را به شکل رابطه (۱۷) بازنویسی نمود.

$$\mathbf{g}^{ASCH}=\nabla V^{ASCH}=g_{r'}^{ASCH}\mathbf{e}_{r'}+g_{\theta'}^{ASCH}\mathbf{e}_{\theta'}+g_{\lambda'}^{ASCH}\mathbf{e}_{\lambda'}$$ رابطه(۱۲)

$$g_{sat}^{ASCH}=\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+2}\frac{\partial P_k^m(\cos\theta)}{\partial\theta}(C_k^m\cos m\lambda+S_k^m\sin m\lambda)\\ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}m\left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+2}\frac{P_k^m(\cos\theta)}{\sin\theta}(-C_k^m\sin m\lambda+S_k^m\cos m\lambda)\\ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(n_k+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+2}P_k^m(\cos\theta)(C_k^m\cos m\lambda+S_k^m\sin m\lambda)\end{pmatrix}$$ رابطه (۱۳)

$$\mathbf{e}_{r'}=\begin{bmatrix}\sin\theta'\cos\lambda'\\ \sin\theta'\sin\lambda'\\ \cos\theta'\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_{\theta'}=\begin{bmatrix}\cos\theta'\cos\lambda'\\ \cos\theta'\sin\lambda'\\ -\sin\theta'\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_{\lambda'}=\begin{bmatrix}-\sin\lambda'\\ \cos\lambda'\\ 0\end{bmatrix}$$ رابطه (۱۴)

$$\delta g_{satA,satB}^{LOS-ASCH}=(\mathbf{g}_B^{ASCH}-\mathbf{g}_A^{ASCH}).\mathbf{e}=\mathbf{g}_B^{ASCH}.\mathbf{e}-\mathbf{g}_A^{ASCH}.\mathbf{e}$$ رابطه (۱۵)

$$\begin{aligned}\mathbf{e.e}_{r_{sat}}&=\left(\sin\theta'(\Delta X\ \cos\lambda'+\Delta Y\ \sin\lambda')+\Delta Z\ \cos\theta'\right)/\rho\\ \mathbf{e.e}_{\theta_{sat}}&=\left(\cos\theta'(\Delta X\ \cos\lambda'+\Delta Y\ \sin\lambda')-\Delta Z\ \sin\theta'\right)/\rho\\ \mathbf{e.e}_{\lambda_{sat}}&=(-\Delta X\ \sin\lambda'+\Delta Y\ \cos\lambda')/\rho\end{aligned}$$ رابطه(۱۶)

$$\delta g_{satA,satB}^{LOS\_ASCH}(r_B',\lambda_B',\theta_B',r_A',\lambda_A',\theta_A')=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\left(C_k^mF_k^m(r_B',\lambda_B',\theta_B',r_A',\lambda_A',\theta_A')+S_k^mG_k^m(r_B',\lambda_B',\theta_B',r_A',\lambda_A',\theta_A')\right)$$ رابطه (۱۷)

در رابطه (۱۷)، $F_k^m$ و $G_k^m$ خلاصه‌شده‌ی جملاتی است که در پیوست بیان‌شده است.

همچنین می‌توان این معادله را به‌صورت یک رابطه خطی بین داده‌های *LGD* واقعی در فریم *ASCH* و ضرایب مجهول هارمونیک کلاه کروی اصلاح‌شده مطابق رابطه (۱۸) تعریف نمود:

$$l + v = Ax \qquad \text{(۱۸)رابطه}$$

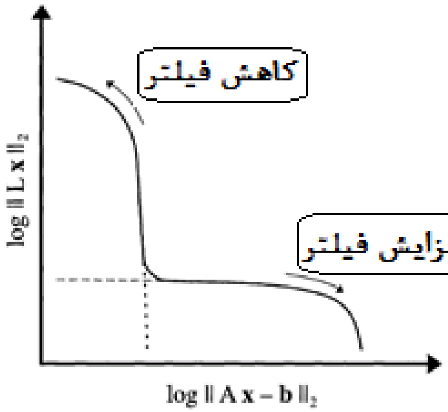
در رابطه (۱۸) $A$ ماتریس طراحی، $l$ بردار مشاهدات، $x$ بردار پارامترهای مجهول و $v$ بردار خطای تصادفی مشاهدات است. مقادیر بردار $v$ دارای میانگین صفر بوده که جمله‌های آن با واریانس همسان (واریانس ثابت) و به‌صورت نا همبسته (کواریانس صفر) می‌باشند.

با توجه به عدد شرط *(Cond)*[1] مسئله و بد وضعی مسئله‌ی معکوس، لازم است از روش‌های پایدارسازی[2] استفاده شود. روش تیخونوف[3]-فیلیپس[4] یکی از متداول‌ترین روش‌های پایدارسازی است، که در اینجا بکار گرفته‌شده است. درروش تیخونوف هدف یافتن راه‌حل مسئله‌ی مینیمم‌سازی به شکل رابطه (۱۹) است [۳۲]:

$$\min\left\{\left\|Ax - b\right\|_2^2 + \lambda^2 \left\|Lx\right\|_2^2\right\} \qquad \text{(۱۹)رابطه}$$

درروش تیخونوف نرم جواب مسئله و نرم بردار خطاها هم‌زمان کمترین مقدار می‌باشند. در رابطه (۱۹)، پارامتر پایدارسازی $\lambda$ به کمک منحنی-ال تعیین می‌گردد. منحنی-ال، یک نمودار *log-log* از نرم راه‌حل پایدارسازی شده در مقابل نرم باقیمانده است، که نمودار حاصل اغلب به شکل حرف لاتین $L$ می‌شود (مطابق شکل (۳)). ایده‌ی روش منحنی-ال، انتخاب پارامتر پایدارسازی $\lambda$ به‌عنوان نقطه گوشه در نمودار با بیشترین انحناء است.

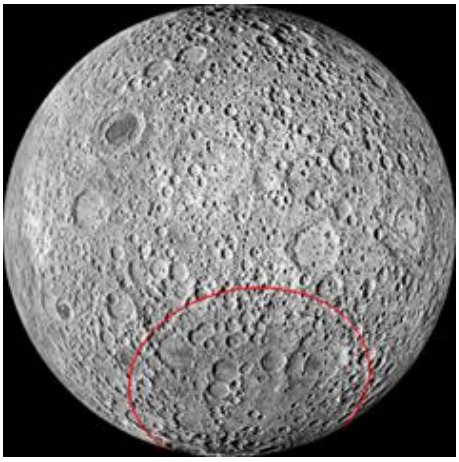
[1] Condition number
[2] regularization
[3] Tikhonov
[4] Phillips



شکل ۳: شکل عمومی منحنی-ال [۳۲]

## ۴- مطالعه موردی: قطب جنوب کره ماه

در این بخش، به مدل‌سازی میدان گرانش بر روی قطب جنوب ماه به‌عنوان یک مطالعه‌ی موردی پرداخته می‌شود. منطقه‌ی موردمطالعه، در محدوده‌ی بین ۹۰- تا ۸۵- درجه‌ی عرض جغرافیایی و ۱۸۰- تا ۱۸۰ درجه طول جغرافیایی مطابق شکل (۴) در نظر گرفته شده است. در این مطالعه، یک سیستم مختصات محلی به‌صورت کلاهک کروی شکل با شعاع کلاهک ۵ درجه و مختصات مرکز ۹۰- درجه‌ی عرض جغرافیایی و صفر درجه‌ی طول جغرافیایی مورداستفاده قرارگرفته است. موقعیت مرکز و شعاع سیستم مختصات کلاهک کروی ذکرشده به‌گونه‌ای است که بتواند به‌طور کامل منطقه‌ی جنوبگان را پوشش دهد (شکل (۴)).


شکل۴: منطقه مورد مطالعه

### ۴-۱- مشاهدات شبیه‌سازی‌شده

مشاهدات مورداستفاده برای مدل‌سازی میدان ثقل در قطب جنوب ماه، از طریق موقعیت شبیه‌سازی‌شده‌ی زوج ماهواره‌ی گریل هنگام مأموریت اولیه *(PM)*[1] در ارتفاع متوسط ۵۰ کیلومتر و مأموریت توسعه داده‌شده *(XM)*[2] در ارتفاع متوسط ۲۰ کیلومتر سطح ماه و همچنین به‌کارگیری مدل ژئوپتانسیل *GL1500E* برای شبیه‌سازی تغییرات مشاهدات *LGD*، به‌دست‌آمده است. این مشاهدات پس از حذف داده‌های طول‌موج بلند، شامل درجات ۴۰۰ تا ۱۵۰۰ می‌باشند. برای جزئیات بیشتر به جدول (۱) مراجعه شود.

شکل (۵) نمایش مناسبی جهت درک بهتر پراکندگی مشاهدات و مختصات زوج ماهواره‌ی گریل است، که بیانگر موقعیت و پراکندگی موقعیت ماهواره‌ی گریل-آ[3] و گریل-ب[4] در بازه‌ی زمانی سه‌ماهه می‌باشد.

مدار ماهواره‌ی گریل به دلیل ارتفاع پایین ماهواره و تغییرات بالای میدان گرانش بسیار پر نوسان است که این نشان‌دهنده‌ی اثر میدان جاذبه‌ی بالای ماه بر اغتشاشات مداری ماهواره‌ی گریل می‌باشد. برای درک بهتر میزان تغییرات میدان گرانش در سطح کره‌ی ماه، تغییرات ارتفاعی مدار ماهواره‌ی گریل-آ هنگام مأموریت اولیه و مأموریت‌های تمدیدشده به کمک شکل (۶) نشان داده‌شده است.

همان‌طور که در شکل(۶) ملاحظه می‌شود به دلیل کاهش ارتفاع ماهواره گریل در طول مأموریت تمدید شده، مدار گریل تحت تأثیر تغییرات بالای میدان گرانش قرارگرفته و درنتیجه دارای نوسانات بسیار زیادی به نسبت مأموریت اولیه است. از سویی برای درک بهتر تغییرات ارتفاعی داده‌های بکار گرفته در این مقاله، تفاوت ارتفاعی هر مأموریت ترسیم شده است.

### ۴-۲- مدل‌سازی محلی میدان ثقل بر مبنای توابع هارمونیک کلاه کروی *ASCH* بر روی منطقه قطب جنوب کره‌ی ماه

در حالت اول برای مدل‌سازی میدان گرانش در منطقه‌ی موردنظر از داده‌های مأموریت اولیه استفاده‌شده است. پس از ایجاد ماتریس ضرایب به کمک رابطه (۱۷) و تشکیل معادله‌ی نرمال، ضرایب ژئوپتانسیل حاصل از توابع هارمونیک *ASCH* از طریق حل مسئله معکوس و پایدارسازی محاسبه می‌شوند. ضرایب ژئوپتانسیل محلی با داده‌های کنترلی که در مسئله‌ی معکوس استفاده‌نشده است، ارزیابی می‌شوند. همچنین جهت بهترین برازش مدل بر روی مشاهدات و صرفه‌جویی زمان و کاهش محاسبات، مدل‌سازی میدان گرانش با مقادیر مختلف درجه انجام می‌گردد. درجه‌ی بهینه برای کلاهک ۵ درجه در قطب جنوب ماه با استفاده از داده‌های مأموریت اولیه برابر ۴۰ می‌باشد.

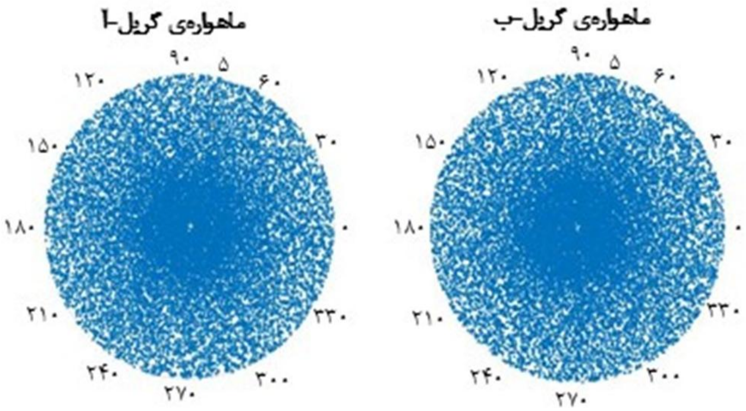
همچنین می‌توان اختلاف بین مدل *ASCH* و مقادیر *LGD* در نقاط کنترل را مطابق شکل (۷) بررسی نمود. همان‌طور که قابل‌مشاهده است، با افزایش درجه، مدل‌سازی بهبودیافته و درنهایت بهترین تطبیق مدل و مقادیر در درجهٔ ۴۰ حاصل‌شده است.

---

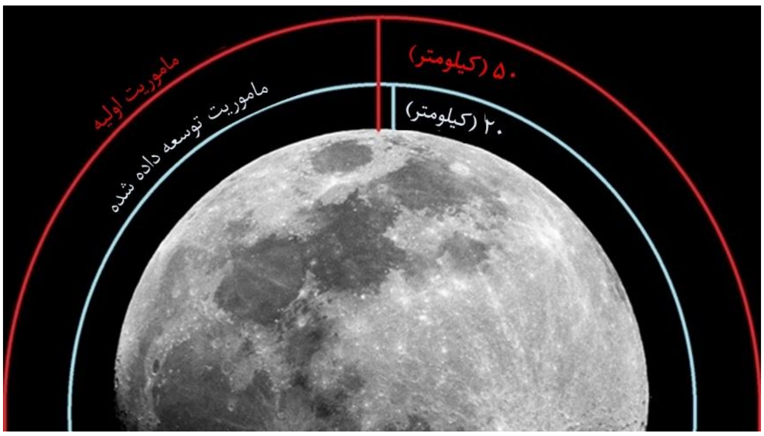
[1] *Primary Mission*
[2] *Extended Mission*
[3] *GRAIL-A*
[4] *GRAIL-B*

جدول ۱: داده‌های شبیه‌سازی‌شده‌ی گریل

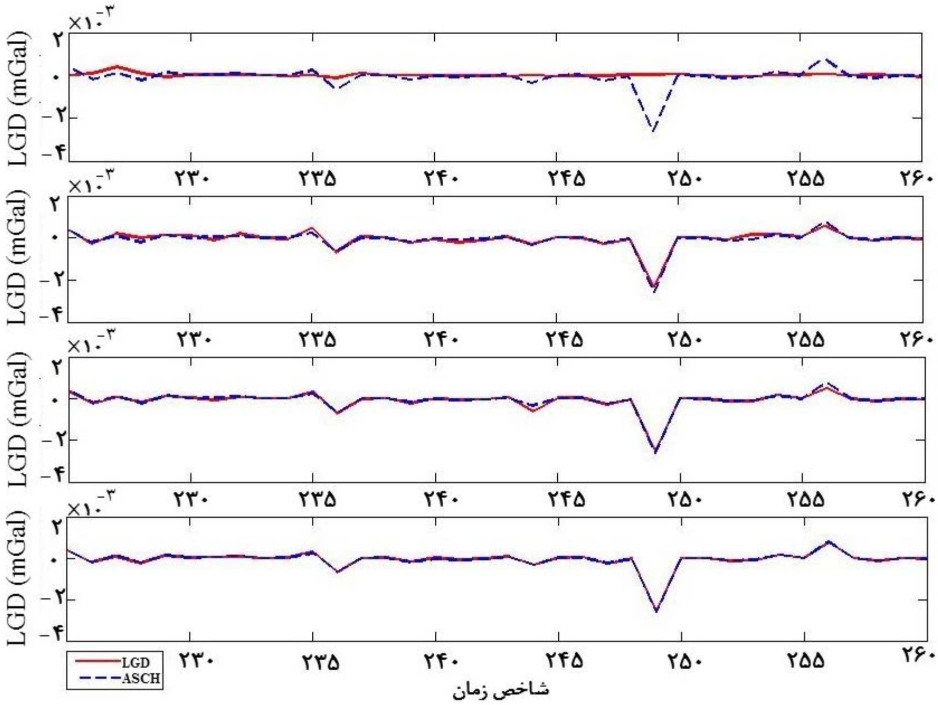
| بازه زمانی | ارتفاع متوسط (متر) | $\sigma$ | بیشترین مقدار LGD ($\mu$Gal) | کمترین مقدار LGD ($\mu$Gal) | آنالیز / مأموریت |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ مارس ۲۰۱۲ – ۲۹ می ۲۰۱۲ | ۵۰۱۰۰ | ۰٫۰۰۰۳۷۴ | ۰٫۵۵ | -۰٫۵۴ | مأموریت اولیه |
| ۳۰ آگوست ۲۰۱۲ – ۱۸ نوامبر ۲۰۱۲ | ۲۱۳۰۰ | ۰٫۲۵۱۷ | ۳۶۴٫۴ | -۴۰۲٫۱ | مأموریت تمدیدشده |




شکل ۵: پراکندگی موقعیت زوج ماهواره‌ی گریل

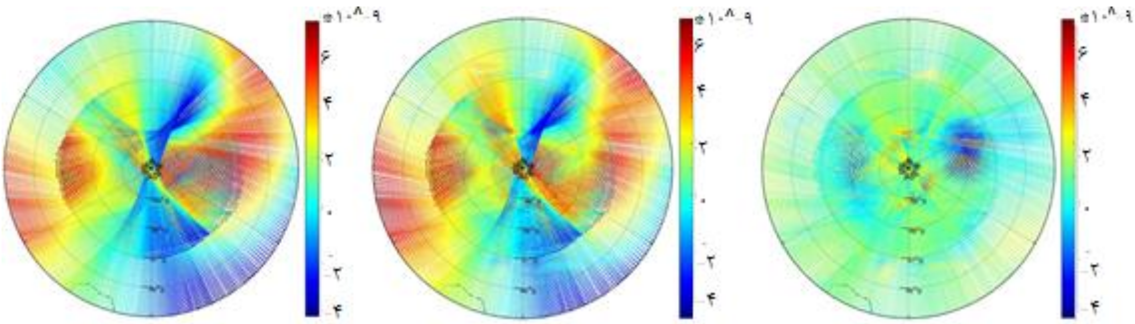



شکل ۶: اختلاف ارتفاعی مدار ماهواره‌ی گریل در بازه زمانی مأموریت اولیه *PM* (مدار قرمز) و مأموریت توسعه داده‌شده *XM* (مدار آبی)




**شکل ۷: مقایسهٔ نتایج به‌دست‌آمده از مدل *ASCH* (رنگ آبی) و مشاهدات *LGD* (رنگ قرمز) برای درجات مختلف مدل هارمونیک محلی*ASCH* : از بالا به پایین ۱- درجهٔ ۱۰، ۲- درجهٔ ۲۰، ۳- درجهٔ ۳۰، ۴- درجهٔ ۴۰**

به دلیل ارتفاع کمتر مأموریت *XM* و تأثیر بیشتر میدان گرانش، در ادامه ارزیابی دیگری برای مدل‌سازی محلی *ASCH* انجام‌شده است. پس برای حالت دوم، ابتدا از داده‌های مأموریت *XM* که دارای اطلاعات جزئی‌تر از میدان گرانش است، برای مدل‌سازی و تشکیل ضرایب هارمونیک محلی استفاده می‌شود. این تغییرات میدان گرانش در لایه‌ی ارتفاعی متوسط ۲۰ کیلومتر از سطح ماه، محاسبه‌شده است. در ادامه برای تائید ضرایب ژئوپتانسیل حاصل‌شده از ضرایب مدل به‌دست‌آمده در مرحله‌ی قبلی، از آن برای تشکیل داده‌های *LGD* جهت برآورد میدان ثقل مأموریت اولیه استفاده می‌شود. بدین‌صورت صحت‌سنجی مدل ژئوپتانسیل صورت می‌گیرد. (شکل (۸)).



**شکل۸: تغییرات میدان ثقل در لایه‌ی ارتفاعی متوسط ۲۰ کیلومتر سطح ماه، از چپ به راست ۱- مشاهدات *LGD*(m/s^2) ، ۲- مدل *ASCH*(m/s^2) و ۳- اختلاف بین مدل و مشاهدات (m/s^2)**

جهت افزایش اطمینان از فرآیند انجام‌شده و ارزیابی ضرایب ژئوپتاسیل مدل، تابع پایه هارمونیک محلی توسط پروفایل کنترلی داده‌های *LGD* ارزیابی می‌شود. این پروفایل‌های کنترلی حاوی داده‌هایی هستند که در مسئله‌ی معکوس استفاده نمی‌شوند و در منطقه‌ی قطب جنوب ماه پراکندگی مناسبی دارند. بنابراین، ما مقادیر *LGD* به‌دست‌آمده از مدل *ASCH* را با داده‌های *LGD* حاصل از مدل *GL1500E* در پروفایل‌های کنترلی مقایسه می‌کنیم. برای ارزیابی بهتر نتایج عددی، این مقایسه بر روی پروفایل‌های کنترلی در دو مأموریت ذکرشده انجام می‌شود. در جدول (۲) نتایج مدل *ASCH* محاسبه و به‌صورت دو ارزیابگر ریشه‌ی میانگین مربعات خطا و میانگین صحت ضرایب مدل محلی نشان داده می‌شود.

**جدول۲: مقدار ارزیاب‌گرهای ریشه میانگین مربعات خطا و میانگین برای اختلاف‌های *LGD* حاصل از مدل‌سازی و مشاهده‌شده در پروفایل کنترل مأموریت اولیه و مأموریت توسعه داده شده**

| $K_{\max}$ | میانگین ($\mu Gal$) | ریشه میانگین مربعات خطا ($\mu Gal$) | مأموریت |
|---|---|---|---|
| °۵۰ | ۰/۰۵ | ۰/۰۸ | مأموریت اولیه |
| °۵۰ | ۰/۱۲ | ۰/۱۵ | مأموریت تمدیدشده |

بررسی نتایج عددی حاصل از مدل محلی *ASCH* نشان می‌دهد، مدل محلی *ASCH* علاوه بر اینکه در مطالعات منطقه‌ای خاص مانند منطقه‌ی جنوبگان مفید است، می‌تواند با استفاده از ضرایب بسیار کمتر و دقت رزولوشن مکانی مناسب، تغییرات میدان گرانش را همانند مدل ساخته‌شده به‌واسطه‌ی هارمونیک‌های کروی با درجه و مرتبه بسیار بالا بیان نماید.

### ۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش از تابع *ASCH* برای مدل‌سازی میدان گرانش محلی با استفاده از مشاهدات *LGD* بر روی قطب جنوب کره‌ی ماه استفاده کردیم. با به‌کارگیری عملگر دیفرانسیل گرانشی *LOS* در تابع هارمونیک *ASCH*، ماتریس ضرایب و سپس معادله نرمال را تعریف می‌کنیم. در ادامه، مسئله‌ی معکوس با استفاده از روش پایدارسازی حل می‌شود تا ضرایب ژئوپتانسیل به دست‌آید. در این مطالعه از دو سناریو جهت ارزیابی مدل انتخاب شده استفاده کردیم. در حالت اول صرفاً از مشاهدات مأموریت اولیه برای مدل‌سازی استفاده شد و نتایج آن در درجات مختلف مورد ارزیابی قرار گرفت، برای صحت سنجی مدل ژءوپتانسیل ایجاد شده بروی منطقه از یکسری نقاط کنترلی که در مسئله‌ی معکوس استفاده‌نشده است، بهر می‌بریم. نتایج عددی نشان می‌دهند مدل محلی توانایی بالایی در مدل‌سازی مشاهدات این مأموریت دارد. در ادامه در سناریو دوم به دلیل ارتفاع متفاوت گریل در مأموریت‌های اولیه و توسعه داده‌شده و چالش بیشتر مدل‌سازی در مأموریت توسعه داده‌شده،از داده‌های مأموریت توسعه داده‌شده جهت برآورد ضرایب مدل و جهت صحت‌سنجی مدل از داده‌های مأموریت اولیه استفاده نمودیم. اما جهت ارزیابی اینبار علاوه بر انتخاب نقاط کنترل بروی لایه مشاهدات ورودی مسئله‌ی معکوس از مشاهدات مأموریت اولیه هم‌جهت ارزیابی مدل ژئوپتانسیل ایجادشده استفاده می‌کنیم، درنتیجه، *RMSE* حاصل از مدل ایجاد شده از روش *ASCH* و مشاهدات *LGD* مأموریت اولیه در نقاط کنترل برابر با ۰/۰۸ میکروگال و در مورد مشاهدات مأموریت توسعه داده‌شده برابر با ۰/۱۵ میکروگال به‌دست آمده است. با توجه به افزایش

رزولوشن مکانی مدل ایجادشده نسبت به مدل‌های جهانی موجود، می‌توانیم برای مطالعه‌ی وجود آب در قطب جنوب ماه و بررسی ساختار و ترکیب درونی ماه از این روش استفاده نماییم. بعنوان مطالعات آتی پیشنهاد می‌گردد که اولا از تلفیق دو ماموریت جهت بهبود و گسترش طیف فرکانسی مدل محلی با استفاده از روش‌های مطرح مشاهدات میدان ثقل استفاده گردد، ثانیا با استفاده از مدل‌های ژئوپتانسیل وابسته به زمان ماهیانه و فصلی ایجاد شده، اطلاعات دخیره آب در قسمت قطب جنوب مورد ارزیابی قرار گیرد، تا الا فرضیه ادعایی وجود یخ در دهانه‌های شاکلتن قطب جنوب ثابت شود و ثانیا میزان تغییرات توده جرمی یخ موجود در این منطقه مورد ارزیابی قرار گیرد.

## پیوست:

در رابطه (۱۷)، $F_k^m$ و $G_k^m$ خلاصه‌شده جملات:

$$
\begin{aligned}
&F_k^m(r'_B,\lambda'_B,\theta'_B,r'_A,\lambda'_A,\theta'_A)=\\
&\left(\frac{R}{r'_B}\right)^{n_k+1}\left(\frac{n_k+1}{r'_B}\right)\cos m\lambda'_B P_k^m(\cos\theta'_B)R_{11}(\lambda'_B,\theta'_B)\\
&-\left(\frac{R}{r'_A}\right)^{n_k+1}\left(\frac{n_k+1}{r'_A}\right)\cos m\lambda'_A P_k^m(\cos\theta'_A)R_{12}(\lambda'_A,\theta'_A)\\
&+\left(\frac{R}{r'_B}\right)^{n_k+1}\cos m\lambda'_B\left(\frac{\partial P_k^m(\cos\theta')}{\partial\theta'}\right)_{\theta'=\theta'_B}R_{21}(\lambda'_B,\theta'_B)\\
&-\left(\frac{R}{r'_A}\right)^{n_k+1}\cos m\lambda'_A\left(\frac{\partial P_k^m(\cos\theta')}{\partial\theta'}\right)_{\theta'=\theta'_A}R_{22}(\lambda'_A,\theta'_A)\\
&+\left(\frac{R}{r'_B}\right)^{n_k+1}\frac{1}{\sin\theta'_B}\sin m\lambda'_B P_k^m(\cos\theta'_B)R_{31}(\lambda'_B)\\
&-\left(\frac{R}{r'_A}\right)^{n_k+1}\frac{1}{\sin\theta'_A}\sin m\lambda'_A P_k^m(\cos\theta'_A)R_{32}(\lambda'_A)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&G_k^m(r'_B,\lambda'_B,\theta'_B,r'_A,\lambda'_A,\theta'_A)=\\
&\left(\frac{R}{r'_B}\right)^{n_k+1}\left(\frac{n_k+1}{r'_B}\right)\sin m\lambda'_B P_k^m(\cos\theta'_B)R_{11}(\lambda'_B,\theta'_B)\\
&-\left(\frac{R}{r'_A}\right)^{n_k+1}\left(\frac{n_k+1}{r'_A}\right)\sin m\lambda'_A P_k^m(\cos\theta'_A)R_{12}(\lambda'_A,\theta'_A)\\
&+\left(\frac{R}{r'_B}\right)^{n_k+1}\sin m\lambda'_B\left(\frac{\partial P_k^m(\cos\theta')}{\partial\theta'}\right)_{\theta'=\theta'_B}R_{21}(\lambda'_B,\theta'_B)\\
&-\left(\frac{R}{r'_A}\right)^{n_k+1}\sin m\lambda'_A\left(\frac{\partial P_k^m(\cos\theta')}{\partial\theta'}\right)_{\theta'=\theta'_A}R_{22}(\lambda'_A,\theta'_A)\\
&+\left(\frac{R}{r'_B}\right)^{n_k+1}\frac{1}{\sin\theta'_B}\cos m\lambda'_B P_k^m(\cos\theta'_B)R_{31}(\lambda'_B)
\end{aligned}
$$

$$-\left(\frac{R}{r'_A}\right)^{n_k+1}\frac{1}{\sin\theta'_A}\cos m\lambda'_A P_k^m(\cos\theta'_A)R_{32}(\lambda'_A)$$

$R_{11}$، $R_{12}$، $R_{22}$، $R_{31}$ و $R_{32}$ در روابط $F_k^m$ و $G_k^m$ خلاصه‌شده جملات:

$$R_{11}(\lambda'_B,\theta'_B)=\left(\sin\theta'_B(\Delta X\ \cos\lambda'_B+\Delta Y\ \sin\lambda'_B)+\Delta Z\ \cos\theta'_B\right)/\rho$$
$$R_{12}(\lambda'_A,\theta'_A)=\left(\sin\theta'_A(\Delta X\ \cos\lambda'_A+\Delta Y\ \sin\lambda'_A)+\Delta Z\ \sin\theta'_A\right)/\rho$$
$$R_{22}(\lambda'_A,\theta'_A)=\left(\cos\theta'_A(\Delta X\ \cos\lambda'_A+\Delta Y\ \sin\lambda'_A)-\Delta Z\ \sin\theta'_A\right)/\rho$$
$$R_{31}(\lambda'_B)=(-\Delta X\ \sin\lambda'_B+\Delta Y\ \cos\lambda'_B)/\rho$$
$$R_{32}(\lambda'_A)=(-\Delta X\ \sin\lambda'_A+\Delta Y\ \cos\lambda'_A)/\rho$$

## مراجع


*[1] N. Sneeuw, Physical Geodesy. 2004.*

*[2] O. D. Kellogg, "The Potential," in Foundations of Potential Theory, O. D. Kellogg, Ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1929, pp. 48-84.*

*[3] R. S. Nerem, S. M. Klosko, and N. K. Pavlis, "Applications of Global Gravity Field Models in Geodesy and Oceanography," in Global Gravity Field and Its Temporal Variations, Berlin, Heidelberg, 1996, pp. 1-11: Springer Berlin Heidelberg.*

*[4] F. Tavares. (2018). Ice Confirmed at the Moon's Poles. Available: https://www.nasa.gov/feature/ames/ice-confirmed-at-the-moon-s-poles.*

*[5] M. T. Zuber, D. E. Smith, D. H. Lehman, T. L. Hoffman, S. W. Asmar, and M. M. Watkins, "Gravity Recovery and Interior Laboratory (GRAIL): Mapping the Lunar Interior from Crust to Core," Space Science Reviews, vol. 178, no. 1, pp. 3-24, 2013/09/01 2013.*

*[6] G. V. Haines, "Spherical cap harmonic analysis," Journal of Geophysical Research: Solid Earth, https://doi.org/1029/10/JB090iB03p02583 vol. 90, no. B3, pp. 2583-2591, 1985/02/28 1985a.*

*[7] G. V. Haines, "Spherical cap harmonic analysis of geomagnetic secular variation over Canada 1960–1983," Journal of Geophysical Research: Solid Earth, https://doi.org/1029/10/JB090iB14p12563 vol. 90, no. B14, pp. 12563-12574, 1985/12/10 1985b.*

*[8] L. Jiancheng, C. Dingbo, and N. Jinsheng, "Spherical cap harmonic expansion for local gravity field representation," Manuscripta geodaetica, vol. 20, no. 4, pp. 265-265, 1995.*

*[9] A. De Santis, "Conventional spherical harmonic analysis for regional modelling of the geomagnetic field," Geophysical Research Letters, https://doi.org/1029/10/92GL01068 vol. 19, no. 10, pp. 1065-1067, 1992/05/22 1992.*

*[10] S.-C. Han, "Improved regional gravity fields on the Moon from Lunar Prospector tracking data by means of localized spherical harmonic functions," Journal of Geophysical Research: Planets, https://doi.org/1029/10/2008JE003166 vol. 113, no. E11, 2008/11/01 2008.*

*[11] S. Goossens, Y. Ishihara, K. Matsumoto, and S. Sasaki, "Local lunar gravity field analysis over the South Pole-Aitken basin from SELENE farside tracking data," Journal of Geophysical Research: Planets, https://doi.org/1029/10/2011JE003831 vol. 117, no. E2, 2012/02/01 2012.*

*[12] G. Younis, "Regional Gravity Field Modeling with Adjusted Spherical Cap*

*Harmonics in an Integrated Approach," 2013.*

*[13] M. Raoofian Naeeni and M. Feizi, "Regional Gravity Field Modelling using Adjausted Spherical Cap Harmonic Analysis," (in eng), Journal of Geomatics Science and Technology, Research vol. 7, no. 1, pp. 115-124, 2017.*

*[14] m. Feizi and M. R. Naeeni, "Local gravity field modeling using basis functions of harmonic nature and vector airborne Gravimetry, Case Study: Gravity field modeling over north-east of Tanzania region," (in Fa), Journal of the Earth and Space Physics, vol. 44, no. 3, pp. 523-534, 2018.*

*[15] É. L. Akim, "Determination of the Gravitational Field of the Moon from the Motion of the Artificial Lunar Satellite "Luna-10"," Soviet Physics Doklady, vol. 11, p. 855, April 01, 1967 1967.*

*[16] A. S. Konopliv et al., "The JPL lunar gravity field to spherical harmonic degree 660 from the GRAIL Primary Mission," Journal of Geophysical Research: Planets, https://doi.org/1002/10/jgre.20097 vol. 118, no. 7, pp. 1415-1434, 2013/07/01 2013.*

*[17] M. Erwan. Lunar Gravity Field: GRGM1200A. Available: https://pgda.gsfc.nasa.gov/products/50*

*[18] B. D. Tapley, S. Bettadpur, M. Watkins, and C. Reigber, "The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results," Geophysical Research Letters, vol. 31, no. 9, 2004.*

*[19] W. M. Klipstein et al., "The Lunar Gravity Ranging System for the Gravity Recovery and Interior Laboratory (GRAIL) Mission," Space Science Reviews, vol. 178, no. 1, pp. 57-76, 2013/09/01 2013.*

*[20] R. Rummel, "Determination of short-wavelength components of the gravity field from satellite-to satellite tracking or satellite gradiometry," manuscripta geodaetica, vol. 4, no. 2, pp. 107-148, 1979.*

*[21] S. R. Ghaffari-Razin and B. Voosoghi, "Regional ionosphere modeling using spherical cap harmonics and empirical orthogonal functions over Iran," Acta Geodaetica et Geophysica, vol. 52, 01/29 2016.*

*[22] M. Feizi, M. Raoofian-Naeeni, and S.-C. Han, "Comparison of spherical cap and rectangular harmonic analysis of airborne vector gravity data for high-resolution (5/1 km) local geopotential field models over Tanzania," Geophysical Journal International, vol. 227, no. 3, pp. 1465-1479, 2021.*

*[23] M. Šprlák, S.-C. Han, and W. Featherstone, "Integral inversion of GRAIL inter-satellite gravitational accelerations for regional recovery of the lunar gravitational field," Advances in Space Research, vol. 65, no. 1, pp. 630-649, 2020.*

*[24] M. Šprlák and S.-C. Han, "On the use of spherical harmonic series inside the minimum Brillouin sphere: Theoretical review and evaluation by GRAIL and LOLA satellite data," Earth-Science Reviews, vol. 222, p. 103739, 2021.*

*[25] S. Goossens, Á. Fernández Mora, E. Heijkoop, and T. J. Sabaka, "Patched local lunar gravity solutions using GRAIL data," Earth and Space Science, vol. 8, no. 11, p. e2021EA001695, 2021.*

*[26] M. Šprlák, S.-C. Han, and W. Featherstone, "Forward modelling of global gravity fields with 3D density structures and an application to the high-resolution (~ 2 km) gravity fields of the Moon," Journal of Geodesy, vol. 92, no. 8, pp. 847-862, 2018.*

*[27] M. Šprlák, S.-C. Han, and W. Featherstone, "Spheroidal forward modelling of the gravitational fields of 1 Ceres and the Moon," Icarus, vol. 335, p. 113412, 2020.*

*[28] K. Ghobadi Far et al., "A transfer function between line of sight gravity difference and*

*GRACE intersatellite ranging data and an application to hydrological surface mass variation," Journal of Geophysical Research: Solid Earth, vol. 123, no. 10, pp. 9186-9201, 2018.*

*[29] C. Hirt, W. Featherstone, M. Kuhn, and S. Claessens, "Comments on "A high resolution Mars surface gravity grid"(Górski et al., 2018, Planetary and Space Science 160, 84–106)," Planetary and Space Science, vol. 176, p. 104685, 2019.*

*[30] M. Šprlák, S. Han, and W. Featherstone, "Is the spheroidal approximation of the Moon important for high-resolution forward gravitational field modelling?."*

*[31] M. Šprlák, "Crustal density and global gravitational field models on the Moon from GRAIL and LOLA satellite data.".*

*[32] Hansen, P. C. (1998). Rank-deficient and discrete ill-posed problems : numerical aspects of linear inversion.*

K. N. TOOSI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF GEODESY AND GEOMATICS ENGINEERING

Journal of Geospatial Information Technology
Vol.12, No.1, Spring 2024

Research Paper

# Local gravity field modeling for the south pole of the Moon by GRAIL satellite data

Mohsen Feizi [1*], Mehdi Raoofian Naeini [2], Maryam Miri [3]

1- Ph.D. student of geodesy, Department of Geodesy and Geomatics, K.N. Toosi University of Technology
2- Associate professor in Department of Geodesy and Geomatics, K.N. Toosi University of Technology
3- Ms.c student of Geodesy, Department of Geodesy and Geomatics, K.N. Toosi University of Technology

**Abstract**

*In this study, the ability of local basic functions in static modeling of the Moon's gravity field is investigated by using the local harmonic functions and the artificial observations of the Primary and Extended Missions of GRAIL satellite and GL1500E global model. In this modeling, three months of GRAIL observations are used to form the observational gravity data. The observation used in this research is the gravity difference along the line of sight of the satellite pair (LGD). Due to the supposition that there are ice masses distributed on the moon, analysis and modeling of variations in the gravitational field are crucial. Modeling the moon's gravity field is complicated by the presence of the earth's gravity field and its effect on the dynamic orbit of the GRAIL satellite. In this study, the coefficients of the local gravity model have been obtained by forming the normal equation through adjusted spherical cap harmonic basic functions (ASCH) and solving the inverse problem. In this study, in the first scenario, the modeling of the gravity field using primary mission data (an average altitude of 50 km) is discussed. In the second scenario, due to the different altitude layers of the Primary Mission (average altitude of 50 km) and the Extended Mission (average altitude of 20 km), observations from the Extended Mission are used to provide ASCH coefficients. The observations from the primary mission are used to evaluate the accuracy of the model. The results of the constructed model on the primary mission data at control points was 0.08 micro Gal and the results of the control points on the extended mission observations was 0.15 micro Gal. As a result, the lunar South Pole local geo-potential model's validation is confirmed. By employing fewer coefficients the method we used showed an acceptable spatial precision of the gravity field of the changes compared to the geo-potential models such as GL1500E.*

**Key words:** *Adjusted spherical cap harmonic, local gravity field.*

***Correspondence Address*** *: Geodesy Group, Department of Geomatics, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.*
***Tel*** *: +98 933 443 8386*
***Email****: mfeizi@mail.kntu.ac.ir*